Lección 1

Números complejos y funciones complejas elementales

1.1. Introducción

Los números que hoy llamamos "complejos" fueron durante muchos años motivo de polémicas y controversias entre la comunidad científica. Poco a poco, por la creciente evidencia de su utilidad, acabaron por ser comúnmente aceptados, aunque no fueron bien comprendidos hasta épocas recientes. Nada hay de extraño en ello si pensamos que los números negativos no fueron plenamente aceptados hasta finales del siglo XVII.

Los números complejos hacen sus primeras tímidas apariciones en los trabajos de Cardano (1501-1576) y Bombelli (1526-1672) relacionados con el cálculo de las raíces de la cúbica o ecuación de tercer grado. Fue René Descartes (1596-1650) quien afirmó que *"ciertas ecuaciones algebraicas sólo tienen solución en nuestra imaginación"* y acuñó el calificativo *"imaginarias"* para referirse a ellas. Desde el siglo XVI hasta finales del siglo XVIII los números complejos o imaginarios son usados con recelo, con desconfianza. Con frecuencia, cuando la solución es un problema resulta ser un número complejo se interpreta esto como que el problema no tiene solución. Para Leibnitz *"el número imaginario es un recurso sutil y maravilloso del espíritu divino, casi un anfibio entre el ser y el no ser"*.

Las razones de todo esto son claras. Así como los números reales responden al problema bien cotidiano de la medida de magnitudes, no ocurre nada similar con los números complejos. Mientras los matemáticos necesitaron interpretar en términos físicos sus objetos de estudio, no se avanzó mucho en la comprensión de los números complejos.

El éxito de Euler y Gauss al trabajar con números complejos se debió a que ellos no se preocuparon de la *"naturaleza"* de los mismos; no se preguntaron "¿qué es un número complejo?", sino que se dijeron *"a ver, para qué sirven, qué puede hacerse con ellos"*. Es Gauss quien definitivamente concede a los números complejos un lugar privilegiado dentro de las matemáticas al probar en 1799 el conocido como **Teorema Fundamental del Álgebra** que afirma que toda ecuación polinómica de grado n con coeficientes complejos tiene, si cada raíz se cuenta tantas veces como su orden, n raíces que *también son números complejos*. Es fácil entender lo que significa este teorema. Fíjate en cada una de las ecuaciones:

$$x+3=0, \quad 2x+3=0, \quad x^2-2=0, \quad x^2+2x+2=0$$

Cuyas soluciones

$$x=-3, \quad x=3/2, \quad x=\pm\sqrt{2}, \quad x=1\pm i$$

tienen sentido cuando x es es, respectivamente, un número entero, racional, real o complejo. Podría ocurrir que este proceso de ampliación del campo numérico continuara. ¿Qué ocurrirá si ahora consideramos ecuaciones polinómicas con coeficientes complejos? Por ejemplo:

$$x^5+(1-i)x^4+(1/5-i\sqrt{2})x^2-8x+3-i/\sqrt{3}=0$$

¿Cómo serán sus soluciones? ¿Aparecerán también nuevos tipos de números? El Teorema Fundamental del Álgebra nos dice que esa ecuación tiene soluciones que *también* son números complejos y, por tanto, que no aparecerán ya por este procedimiento nuevos tipos de números.

El término, hoy usado de *"números complejos"* se debe a Gauss, quien también hizo popular la letra "i" que Euler (1707-1783) había usado esporádicamente. En 1806 Argand interpreta los números complejos como vectores en el plano. La fecha de 1825 es considerada como el nacimiento de la teoría de funciones de variable compleja, pues se publica en dicho año la Memoria sobre la Integración Compleja que Cauchy había escrito ya en 1814.

Estructura de la lección y objetivos

La lección está estructurada en tres partes:

- Álgebra y operaciones básicas con números complejos.

  Además de dar las definiciones básicas y explicar la terminología, a veces confusa, que se usa para hablar de números complejos, comprobaremos lo útiles que son las coordenadas polares para multiplicar números complejos. Aparece así la llamada *forma polar* de un número complejo y el importante concepto de *argumento principal*. Todavía no he encontrado ningún libro que explique el porqué de su definición. Un resultado muy útil es la *fórmula de De Moivre* que nos permitirá calcular las raíces de orden n de un número complejo. Las raíces complejas no se comportan igual que las reales y eso es algo que no suele venir explicado en los libros de texto. Al terminar esta lección serás capaz de ver dónde está el error en expresiones como:

$$-1 = i^2 = i\,i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

$$i = (-1)^{1/2} = [(-1)^3]^{1/2} = (-1)^{3/2} = i^3 = -i$$

También veremos que el *módulo* de un número complejo relaciona la norma euclídea en $\mathbb{R}^2$ con el producto complejo y ello proporciona una herramienta muy útil para trabajar con la norma euclídea en el plano.

- Sucesiones de números complejos.

  Daremos las definiciones básicas de convergencia de una sucesión de números complejos y veremos que el estudio de una sucesión de números complejos es equivalente a estudiar dos sucesiones de números reales. Veremos cómo las sucesiones de números complejos permiten definir con facilidad los conjuntos fractales de Julia y de Mandelbrot.

- Funciones elementales complejas.

  Daremos las definiciones básicas de continuidad y derivabilidad de funciones complejas. Introduciremos la función exponencial compleja y comprobaremos que dicha función contiene a las funciones elementales en el sentido de que todas pueden definirse con facilidad a partir de ella. En particular, las funciones trigonométricas están relacionadas con la función exponencial; resultado que no cabe ni siquiera sospechar cuando se estudian dichas funciones en el contexto real.

La justificación de esta lección es clara: los números complejos son una herramienta básica de cálculo. Son especialmente útiles para trabajar con funciones trigonométricas por medio de las *fórmulas de Euler* y por ello en la teoría de series de Fourier se hace uso constante de ellos. Las transformadas de Fourier y de Laplace son funciones complejas.

Haremos dos prácticas relacionadas con esta lección. En la primera aprenderás a usar los comando básicos de *Mathematica* para trabajar con números complejos. Precisamente, *Mathematica* trata por defecto todas las variables como si fueran números complejos. Comprenderás las respuestas llamativas que da *Mathematica* cuando escribes `(z^3)^(1/3)`, `Exp[Log[z]]` o `Log[Exp[z]]`. Así mismo aprenderás a usar algunos comandos específicos para representar gráficamente funciones complejas. La segunda práctica tratará de los conjuntos de Julia y de Mandelbrot y aprenderás a usar el método de Newton para polinomios complejos con el propósito de generar hermosos conjuntos fractales.

Para seguir con comodidad esta lección conviene que repases:

- Las funciones trigonométricas reales y sus "inversas": definición y propiedades básicas. En particular, la función arcotangente.
- El concepto de límite de una sucesión de números reales. El llamado "criterio del zapato" para la indeterminación 1^∞. La relación entre límite funcional y límite secuencial.

1.2. Operaciones básicas con números complejos

Definición 1.1. Consideremos en el conjunto $\mathbb{R}^2$ las operaciones de adición y producto definidas por

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas. El elemento neutro de la suma es $(0,0)$ y $(1,0)$ es la unidad del producto. Además, $(-a,-b)$ es el opuesto de (a,b), y todo $(a,b)\neq(0,0)$ tiene inverso

$$(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$$

Todas estas propiedades se resumen diciendo que $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ (léase "el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las operaciones de adición y producto") es un *cuerpo*. Dicho cuerpo se representa simbólicamente por $\mathbb{C}$ y sus elementos se llaman **números complejos**.

Comentarios a la definición

A los elementos de $\mathbb{R}^2$ se les llama unas veces *pares ordenados de números reales*, otras *vectores* o *puntos* y también *números complejos*. La razón de esto es que en $\mathbb{R}^2$ conviven varias estructuras cada una con su terminología propia. Por eso a los elementos de $\mathbb{R}^2$ se les llama *vectores* si se está considerando la estructura de espacio vectorial, *puntos* si fijamos la atención en la estructura topológica o afín, *pares ordenados* cuando estamos pensando en $\mathbb{R}^2$ como conjunto sin ninguna estructura particular y *números complejos* cuando se considera la estructura de cuerpo antes definida. Ocurre que estos términos se usan a veces en un mismo párrafo lo que puede resultar confuso. La regla que debes tener siempre presente es que todo **concepto matemático** tiene sentido propio dentro de una determinada **estructura matemática**. Por ello, a un elemento de $\mathbb{R}^2$ se le llama número complejo cuando se va a usar el producto antes definido que es lo que en realidad distingue a los números complejos de los vectores de $\mathbb{R}^2$.

Forma cartesiana de un número complejo

El símbolo usual (a,b) para representar pares ordenados no es conveniente para representar el número complejo (a,b). Para convencerte calcula $(1,-1)^4$. Representaremos los números complejos con un simbolismo más apropiado en el que va a intervenir el producto complejo. Para ello, observa que:

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$$
$$(a,0)(b,0)=(ab,0)$$

esto indica que los números complejos de la forma $(a,0)$ se comportan respecto a la suma y la multiplicación de números complejos exactamente de la misma forma que lo hacen los números reales respecto a la suma y multiplicación propias. En términos, más técnicos, $\mathbb{R}\times\{0\}$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$ isomorfo a $\mathbb{R}$. Por esta razón, en las operaciones con números complejos podemos sustituir los complejos del tipo $(a,0)$ por el número real a. Es decir, hacemos la identificación $(a,0)=a$.

Fíjate que con dicha identificación el producto $a(c,d)$ tiene dos posibles interpretaciones: producto del escalar real a por el vector (c,d) (estructura vectorial de $\mathbb{R}^2$) y producto del complejo $(a,0)$ por el complejo (c,d). Pero ambos coinciden y son iguales a (ac,ad).

El número complejo $(0,1)$ lo representaremos por i. Con ello tenemos que

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$$

Ahora podemos escribir

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi$$

Se dice que a es la **parte real** y b es la **parte imaginaria** del número complejo $a+ib$. El producto ahora es muy fácil de recordar pues

$$(a+ib)(c+id)=ac+i^2bd+i(ad+bc)=ac-bd+i(ad+bc)$$

Es costumbre representar los números complejos con las letras z y w y reservar las letras x, y, u, v para representar números reales. Una expresión de la forma $z=x+iy$ se interpreta como que z es el número complejo cuya parte real es x y cuya parte imaginaria es y. Se escribe $\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$ para representar las partes real e imaginaria de z. Naturalmente, dos números complejos son iguales cuando tienen igual parte real e igual parte imaginaria.

Comentarios a la definición usual $i = \sqrt{-1}$

Acabamos de ver que $i^2 = -1$ pero eso no nos permite escribir así, sin más ni más, que $i = \sqrt{-1}$. Fíjate lo que ocurre si ponemos $i = \sqrt{-1}$ y manejamos ese símbolo con las reglas a las que estamos acostumbrados:

$$i^2 = -1 = i\,i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Luego $1 = -1$. Por tanto, las matemáticas son contradictorias y aquí hemos acabado.

Naturalmente, el error, procede de que estamos haciendo disparates. Fíjate que en la expresión $\sqrt{-1}$ no puedes interpretar que -1 es el número real -1 (porque, como sabes, los números reales negativos no tienen raíz cuadrada real), sino que tienes que interpretar -1 como el número complejo -1 (espero que ya tengas clara la diferencia). Resulta así que estamos usando raíces de números complejos *sin haberlas definido y dando por supuesto que dichas raíces verifican las mismas propiedades que las de los números reales positivos.*

Antes de escribir $\sqrt{-1}$ hay que definir qué significa $\sqrt{z}$ para $z \in \mathbb{C}$. Cuando lo hagamos veremos ¡sorpresa! que *la igualdad* $\sqrt{z}\sqrt{w} = \sqrt{zw}$, válida cuando $z, w \in \mathbb{R}^+$, *no es cierta en general cuando* $z, w \in \mathbb{C}$.

Todavía más disparatado es *definir* $i = \sqrt{-1}$ sin ni siquiera haber definido antes los números complejos. Sin embargo, y aunque parezca mentira, en muchos textos se define (porque sí, sin más explicaciones) $i = \sqrt{-1}$ y a continuación se dice que los números de la forma $a + ib$ son los números complejos. No es de extrañar que luego resulte que $1 = -1$.

No hay un orden en $\mathbb{C}$ compatible con la estructura algebraica

Al ampliar $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ ganamos mucho (como te convencerás cuando estudies la teoría de funciones de variable compleja) pero también perdemos algo. Te recuerdo que $\mathbb{R}$ tiene dos estructuras: la algebraica y la de orden. Ambas estructuras están armoniosamente relacionadas. Pues bien, en $\mathbb{C}$ no hay nada parecido. Podemos definir relaciones de orden en $\mathbb{C}$, pero no hay ninguna de ellas que sea compatible con la estructura algebraica. En efecto, si suponemos que $\leqslant$ es una relación de orden en $\mathbb{C}$ compatible con su estructura algebraica, como $i \neq 0$ habría de ser $0 < i^2 = -1$ (esto todavía no es contradictorio porque pudiera ocurrir que la relación $\leqslant$ no respetara el orden de $\mathbb{R}$). Pero también $0 < 1^2 = 1$, luego $0 < 1 + (-1) = 0$ y eso sí que es contradictorio.

Por tanto, es imposible definir un concepto de número complejo positivo de forma que la suma y el producto de complejos positivos sea positivo. Por ello no se define en $\mathbb{C}$ ningún orden. Así que ya sabes: ¡mucho cuidado con no escribir desigualdades entre números complejos! Naturalmente, puedes escribir desigualdades entre las partes reales o imaginarias de números complejos, porque tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales.

1.2.1. Representación gráfica. Complejo conjugado y módulo de un número complejo

Es usual interpretar el número complejo $x + iy$ como el vector del plano (x, y) y, en ese sentido, se habla del *plano complejo*. El eje horizontal recibe el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario*.

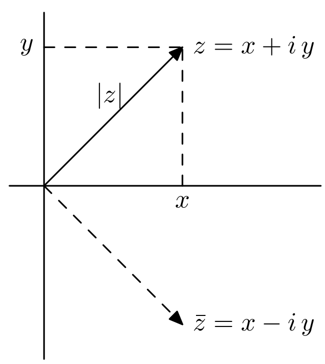


Figura 1.1: Representación de un número complejo

Si $z = x + iy$ es un número complejo (con x e y reales), entonces el **conjugado** de z se define como:

$$\bar{z} = x - iy$$

y el **módulo** o **valor absoluto** de z, se define como:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Observa que $\sqrt{x^2 + y^2}$ está definido sin ambigüedad; es la raíz cuadrada del número real no negativo $x^2 + y^2$.

Geométricamente $\bar{z}$ es sencillamente la reflexión de z respecto al eje real, mientras que $|z|$ es la distancia euclídea del punto (x, y) a $(0, 0)$ o, también, la longitud o norma euclídea del vector (x,y) (ver figura 1.1). La **distancia** entre dos números complejos z y w se define como $|z-w|$.

La representación gráfica de la suma es conocida. Dos números complejos $z=a+ib$ y $w=c+id$ determinan un paralelogramo cuya diagonal (ver figura 1.2) es $z+w$.

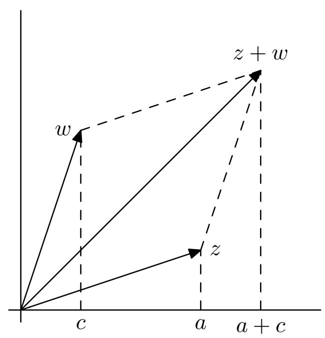


Figura 1.2: Suma de números complejos

Se comprueba fácilmente que si z y w son números complejos se verifica que $\overline{\overline{z}}=z$, $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$ y $\overline{z\,w}=\overline{z}\,\overline{w}$.

También son de comprobación inmediata las desigualdades

$$\text{máx}\{|\operatorname{Re} z|,|\operatorname{Im} z|\}\leqslant|z|\leqslant|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z| \tag{1.1}$$

La igualdad $|z|^2=z\overline{z}$ que se deduce directamente de la definición de módulo de un número complejo, permite utilizar el producto complejo para trabajar con módulos y es de gran utilidad. La usaremos para probar que para todos $z,w\in\mathbb{C}$ es

$$\textbf{a)}\quad |zw|=|z|\,|w| \qquad \text{y} \qquad \textbf{b)}\quad |z+w|\leqslant|z|+|w|$$

a) Basta observar que $|zw|$ y $|z|\,|w|$ son números positivos cuyos cuadrados coinciden, pues

$$|zw|^2=zw\overline{zw}=zw\overline{z}\,\overline{w}=z\overline{z}w\overline{w}=|z|^2|w|^2=(|z|\,|w|)^2$$

b) Es suficiente probar que $|z+w|^2\leqslant(|z|+|w|)^2$. En efecto:

$$\begin{aligned}|z+w|^2&=(z+w)\overline{(z+w)}=(z+w)(\overline{z}+\overline{w})=z\overline{z}+w\overline{w}+z\overline{w}+\overline{z}w=\\&=|z|^2+|w|^2+2\operatorname{Re}(z\overline{w})\leqslant|z|^2+|w|^2+2\,|\operatorname{Re}(z\overline{w})|\leqslant\\&\leqslant|z|^2+|w|^2+2\,|z\overline{w}|=|z|^2+|w|^2+2\,|z|\,|\overline{w}|=|z|^2+|w|^2+2\,|z|\,|\overline{w}|=\\&=(|z|+|w|)^2\end{aligned}$$

Deducimos también que se verifica la igualdad $|z+w| = |z|+|w|$ si, y sólo si, $\operatorname{Re} z\overline{w} = |z\overline{w}|$, esto es, si $z\overline{w}\in\mathbb{R}_o^+$, o lo que es lo mismo $z\overline{w} = \rho$ donde $\rho\in\mathbb{R}_o^+$. Esta igualdad, puede escribirse de forma equivalente multiplicando por w como $z|w|^2 = \rho w$, esto es, $z = \lambda w$ para algún $\lambda\in\mathbb{R}_o^+$ lo que quiere decir que z y w están en una misma semirrecta a partir del origen.

1.2.2. Forma polar y argumentos de un número complejo

El uso de coordenadas polares en el plano facilita mucho los cálculos con productos de números complejos. Para cualquier número complejo $z = x+iy \neq 0$ podemos escribir

$$z = |z|\left(\frac{x}{|z|}+i\frac{y}{|z|}\right)$$

Como $\left(\frac{x}{|z|},\frac{y}{|z|}\right)$ es un punto de la circunferencia unidad, puede escribirse en la forma

$$\left(\frac{x}{|z|},\frac{y}{|z|}\right) = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$$

para algún número $\vartheta\in\mathbb{R}$. Resulta así que

$$z = |z|(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$$

Esta forma de expresar un número complejo recibe el nombre de **forma polar**, cuya interpretación gráfica vemos en la figura 1.3.

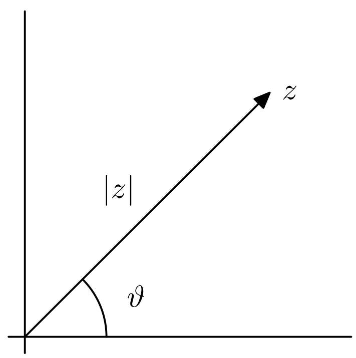


Figura 1.3: Forma polar de un número complejo

Dado $z\in\mathbb{C}$, $z\neq 0$, hay infinitos números $t\in\mathbb{R}$ que verifican la igualdad $z = |z|(\cos t, \operatorname{sen} t)$ cualquiera de ellos recibe el nombre de **argumento** de z. El conjunto de todos los argumentos de un número complejo no nulo se representa por $\operatorname{Arg}(z)$.

$$\operatorname{Arg}(z) = \{t\in\mathbb{R} : z = |z|(\cos t + i\operatorname{sen} t)\}$$

Observa que

$$s,t\in \operatorname{Arg}(z) \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\cos(t)=\cos(s)\\ \sin(t)=\sin(s)\end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow s=t+2k\pi \ \text{ para algún } \ k\in\mathbb{Z}$$

Por tanto, conocido un argumento $t_o\in \operatorname{Arg}(z)$ cualquier otro es de la forma $t_o+2k\pi$ para algún $k\in\mathbb{Z}$, es decir, $\operatorname{Arg}(z)=t_o+2\pi\mathbb{Z}$.

De entre todos los argumentos de un número complejo $z\neq 0$ hay uno único que se encuentra en el intervalo $]-\pi,\pi]$, se representa por $\arg(z)$ y viene dado por

$$\arg(z)=2\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}z}{\operatorname{Re}z+|z|} \quad \text{si } z\notin\mathbb{R}^-$$
$$\arg(z)=\pi \quad \text{si } z\in\mathbb{R}^-$$

A dicho argumento se le llama **argumento principal** de z.

La comprobación de las anteriores afirmaciones es fácil. Como $-\pi/2<\operatorname{arctg}t<\pi/2$, se sigue que $-\pi<\arg(z)<\pi$ si $z\notin\mathbb{R}^-$. Luego, $-\pi<\arg(z)\leqslant\pi$. Si $z=t\in\mathbb{R}^-$ es evidente que $z=|t|(\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi)$. Y para $z\notin\mathbb{R}^-$ se tiene:

$$\cos(\arg(z))=\frac{1-\operatorname{tg}^2(\arg(z)/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\arg(z)/2)}=\frac{(|z|+\operatorname{Re}z)^2-(\operatorname{Im}z)^2}{(|z|+\operatorname{Re}z)^2+(\operatorname{Im}z)^2}=\frac{2\operatorname{Re}z(|z|+\operatorname{Re}z)}{2|z|(|z|+\operatorname{Re}z)}=\frac{\operatorname{Re}z}{|z|}$$

$$\operatorname{sen}(\arg(z))=\frac{2\operatorname{tg}(\arg(z)/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\arg(z)/2)}=\frac{2\operatorname{Im}z(|z|+\operatorname{Re}z)}{(|z|+\operatorname{Re}z)^2+(\operatorname{Im}z)^2}=\frac{2\operatorname{Im}z(|z|+\operatorname{Re}z)}{2|z|(|z|+\operatorname{Re}z)}=\frac{\operatorname{Im}z}{|z|}$$

Donde se ha utilizado que $|z|^2=(\operatorname{Re}z)^2+(\operatorname{Im}z)^2$.

No es difícil comprobar que el argumento principal de $z=x+iy\neq 0$ viene también dado por:

$$\arg(z)=\begin{cases}\operatorname{arctg}(y/x)-\pi & \text{si } y<0,\ x<0\\ -\pi/2 & \text{si } y\leqslant 0,\ x=0\\ \operatorname{arctg}(y/x) & \text{si } x>0\\ \pi/2 & \text{si } y>0,\ x=0\\ \operatorname{arctg}(y/x)+\pi & \text{si } y\geqslant 0,\ x<0\end{cases}$$

Esta última forma es más cómoda para los cálculos.

Observaciones a la definición de argumento principal

Puede parecer un poco extraña la forma de elegir el argumento principal de un número complejo. La elección que hemos hecho supone que medimos ángulos en el semiplano superior de 0 a π y en el semiplano inferior de 0 a $-\pi$.

Fíjate que si tomas un número complejo que esté situado en el tercer cuadrante $z = x+iy$ con $x<0, y<0$ y supones que y es próximo a 0, su argumento principal está próximo a $-\pi$, y si tomas un número complejo que esté situado en el segundo cuadrante, $w = x+iv$ con $x<0, v>0$, y supones que v es próximo a 0, su argumento principal está próximo a π. Además, la distancia $|w-z| = |v-y| = v-y$ es tan pequeña como quieras. Esto nos dice que el argumento principal tiene una discontinuidad en el eje real negativo: salta de $-\pi$ a π cuando atravesamos dicho eje desde el tercer al segundo cuadrante.

Peor todavía dirás. Hasta cierto punto. Primero, la discontinuidad es inevitable. Si queremos elegir argumentos en un intervalo de longitud 2π, digamos, $[\alpha, \alpha+2\pi[$ entonces dichos argumentos saltan de α a $\alpha+2\pi$ cuando atravesamos la semirrecta $(x,y) = \rho(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, $(\rho>0)$. En particular, si tomamos argumentos en el intervalo $[0, 2\pi[$ (cosa que, a primera vista, parece lo razonable) nos encontramos con que entonces se produce una discontinuidad de dichos argumentos en *el eje real positivo*. Bien, sucede que *la extensión a* $\mathbb{C}$ de algunas funciones definidas en $\mathbb{R}^+$ (el logaritmo, las raíces) hace intervenir el argumento principal. Naturalmente, queremos que dichas extensiones sigan siendo continuas en $\mathbb{R}^+$ y ello justifica que tengamos que tomar argumentos principales de la forma en que lo hemos hecho: porque preferimos introducir una discontinuidad en $\mathbb{R}^-$ a perder la continuidad en $\mathbb{R}^+$.

Fórmula de De Moivre

Veamos cómo la forma polar permite hacer fácilmente productos de números complejos. Consideremos dos números complejos no nulos

$$\begin{aligned} z &= |z|\,(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta) \\ w &= |w|\,(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} zw &= |z|\,|w|\,(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) = \\ &= |zw|\,[(\cos\vartheta\cos\varphi - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi) + i(\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi)] = \\ &= |zw|\,(cos(\vartheta+\varphi) + i\operatorname{sen}(\vartheta+\varphi)) \end{aligned}$$

Es decir: *para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.* Por ejemplo, para calcular $(1+i)^4$ como $|1+i| = \sqrt{2}$ y $\arg(1+i) = \pi/4$, se sigue que $(1+i)^4 = -4$.

Así pues, el producto de dos números complejos es geométricamente un giro (pues se suman los argumentos de los números que estamos multiplicando) seguido de una homotecia (el producto de los módulos de ambos números).

Acabamos de ver que si z, w son complejos no nulos, $\vartheta \in \operatorname{Arg}(z)$, $\varphi \in \operatorname{Arg}(w)$, entonces $\vartheta + \varphi \in \operatorname{Arg}(z + w)$. Es ahora fácil demostrar mediante inducción la siguiente fórmula, muy útil, conocida como fórmula de *De Moivre*.Observa también que si $\varphi \in \operatorname{Arg}(z)$ entonces $-\varphi \in \operatorname{Arg}(1/z)$.

Proposición 1.2 (Fórmula de De Moivre). *Si z es un complejo no nulo, ϑ es un argumento de z y n es un número entero, se verifica que $n\vartheta \in \operatorname{Arg}(z^n)$, es decir:*

$$z^n = \big(|z|(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)\big)^n = |z|^n (\cos n\vartheta + i \operatorname{sen} n\vartheta)$$

1.2.3. Raíces de un número complejo

Se trata ahora de resolver la ecuación $w^n = z$ donde n es un número natural, $n \geqslant 2$, y $z \neq 0$ es un número complejo conocido. Escribamos w en forma polar:

$$w = |w| (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

Ahora, usando la fórmula de De Moivre, podemos escribir la ecuación $w^n = z$ en la forma equivalente:

$$w^n = |w|^n (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) = |z| (\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$$

Esta igualdad se da cuando $|w|^n = |z|$ y $n\varphi = \vartheta + 2k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$. Deducimos que $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ (ojo: se trata de la raíz n–ésima de un número positivo, cosa ya conocida). Ahora bien, para cualquier número φ_k de la forma $\varphi_k = (\vartheta + 2k\pi)/n$ tenemos un número complejo

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\varphi_k + i \operatorname{sen}\varphi_k)$$

tal que $(w_k)^n = z$. Como una ecuación polinómica de grado n no puede tener más de n soluciones, se sigue que distintos valores de k deben dar lugar al mismo número w_k. Veamos:

$$w_k = w_q \Leftrightarrow \varphi_k - \varphi_q = 2m\pi \Leftrightarrow k - q = nm$$

Es decir, k y q dan el mismo resto al dividirlos por n. Deducimos que para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ obtenemos w_k distintos y cualquier otro w_q es igual a uno de ellos. Por tanto hay n raíces n–ésimas distintas de z.

De entre todas las raíces n–ésimas de z vamos a designar con el símbolo $\sqrt[n]{z}$ a la **raíz n-ésima principal**, que está definida por

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n} \left(\cos\frac{\arg z}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\arg z}{n}\right)$$

Observa que en el caso particular de que z sea un número real positivo, entonces la raíz principal de z (considerado como número complejo) coincide con la raíz de z (considerado como número real positivo).

Hemos obtenido que las raíces n–ésimas de z vienen dadas por

$$z_k = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0,1,2,\dots,n-1$$

Observa que definiendo $u = \cos(2\pi/n) + i\operatorname{sen}(2\pi/n)$, los números $u_0 = 1, u, u^2, \dots, u^{n-1}$ son las raíces n–ésimas de la unidad. Podemos escribir las raíces n–ésimas de z en la forma $z_k = z_0 u^k$. Como multiplicar por u es un giro de amplitud $2\pi/n$, deducimos que las n raíces de z se obtienen girando la raíz n–ésima principal, z_0, con giros sucesivos de amplitud $2\pi/n$. Es decir, si representamos todas las raíces n–ésimas de z obtenemos n puntos sobre una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt[n]{|z|}$ que forman un polígono regular de n lados.

En general no es cierto que dados dos números complejos z y w entonces el producto de las raíces n-ésimas *principales* de z y de w sea igual a la raíz n-ésima *principal* de zw. Lo que sí es cierto es que el producto de dos raíces n-ésimas cualesquiera de z y de w es una raíz n-ésima de zw. Por tanto, $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w}$, es **una** raíz n-ésima de zw pero no tiene por qué ser la principal.

Por ejemplo, para $n = 2, z = w = -1$, como $\arg(-1) = \pi$, tenemos que

$$\sqrt{-1} = \cos(\pi/2) + i\operatorname{sen}(\pi/2) = i$$

En este caso

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = i\,i = -1 \neq \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

La igualdad $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$ equivale a que para algún entero k se verifique que

$$\frac{\arg(z)}{n} + \frac{\arg(w)}{n} = \frac{\arg(zw)}{n} + 2k\pi$$

es decir, $\arg(z) + \arg(w) = \arg(zw) + 2kn\pi$. Como $-2\pi < \arg(z) + \arg(w) \leqslant 2\pi$ y $n \geqslant 2$ tiene que ser $k = 0$ (pues, en otro caso, $|2kn\pi| \geqslant 4\pi$). Luego, debe ocurrir que $\arg(z) + \arg(w) = \arg(zw)$ lo que equivale a que $-\pi < \arg(z) + \arg(w) \leqslant \pi$.

Por ejemplo, si los números z y w están en el semiplano de la derecha, es decir, $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$, entonces $-\pi/2 < \arg(z) < \pi/2$ y $-\pi/2 < \arg(w) < \pi/2$; por tanto $\arg(z) + \arg(w) = \arg(zw)$ por lo que, en este caso, $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$.

1.2.4. Ejercicios

1. Realiza las operaciones indicadas y expresa el resultado en la forma $a + ib$.

i) $(7-2i)(5+3i)$ ii) $(i-1)^3$ iii) $\overline{(1+i)(2+i)}(3+i)$ iv) $\dfrac{3+i}{\overline{2+i}}$

v) $\dfrac{(4-i)(1-3i)}{-1+2i}$ vi) $(1+i)^{-2}$ vii) $\dfrac{1+2i}{2-i}$ viii) $i^2(1+i)^3$

2. Calcula la parte real e imaginaria de las funciones:

$$\text{a) } f_1(z) = \bar{z}^2 \quad \text{b) } f_2(z) = z^3 \quad \text{c) } f_3(z) = \frac{1}{z} \quad \text{d) } f(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad \text{e) } f_4(z) = \frac{z+i}{z-i}$$

3. Calcula las siguientes cantidades.

$$\text{a) } |(1+i)(2-i)| \quad \text{b) } \left|\frac{4-3i}{2-i\sqrt{5}}\right| \quad \text{c) } \left|(1+i)^{20}\right| \quad \text{d) } \left|\sqrt{2}+i(\sqrt{2}+1)\right|$$

4. Calcula los números complejos z tales que $\dfrac{1+z}{1-z}$ es:

a) Un número real; b) Un número imaginario puro.

5. Expresa en forma polar los siguientes números complejos.

$$\text{a) } -\sqrt{3}-i \quad \text{b) } -\sqrt{3}+i \quad \text{c) } \frac{3}{\sqrt{3}+i} \quad \text{d) } \frac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$$

6. Expresa los siguientes números en la forma $a+ib$:

$$\text{a) } (-1+i\sqrt{3})^{11} \quad \text{b) } \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 \quad \text{c) } \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6 \quad \text{d) } (-\sqrt{3}+i)^{13}$$

7. Calcula $\arg(zw)$ y $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right)$ supuestos conocidos $\arg z$ y $\arg w$.

8. Supuesto que $|z| = 1$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } \operatorname{Im} z > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

9. Sea $z = x+iy$. Supuesto que $|z| = 1$, $z \neq 1$, $z \neq -i$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+i}\right) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } 1-x+y > 0 \\ -3\pi/4 & \text{si } 1-x+y < 0 \end{cases}$$

10. Resuelve la ecuación cuadrática $az^2+bz+c=0$ donde a, b, c, son números complejos conocidos y $a \neq 0$.

11. Calcula todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } z^3 = 1+i \quad \text{b) } z^4 = i \quad \text{c) } z^3 = -1+i\sqrt{3} \quad \text{d) } z^8 = 1 \quad \text{e) } z^2 + \sqrt{32}\,i z - 6i = 0$$

12. Calcula las soluciones de la ecuación $z^4+(1+i)z^2+5i=0$.

13. Demuestra la llamada “igualdad del paralelogramo”:

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2) \quad (z,w\in\mathbb{C})$$

y explica su significado geométrico.

14. Dados dos números complejos α y β, calcula el mínimo valor para $z\in\mathbb{C}$ de la cantidad $|z-\alpha|^2+|z-\beta|^2$.

Sugerencia: La igualdad del paralelogramo puede ser útil.

15. Prueba que $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|<1$ si $|z|<1$ y $|a|<1$ y también si $|z|>1$ y $|a|>1$.

Sugerencia: Una estrategia básica para probar desigualdades entre *módulos* de números complejos consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad.

16. Sea x un número real que no es múltiplo entero de 2π. Prueba las igualdades

$$\text{a)}\quad 1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx = \cos\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\text{b)}\quad \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+\cdots+\operatorname{sen} nx = \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Sugerencia: Si llamamos A a la primera suma y B a la segunda, calcúlese $A+iB$ haciendo uso de la fórmula de De Moivre.

17. Calcula una fórmula para la suma

$$\sum_{k=-N}^{N}\big(\cos(2k\pi t)+i\operatorname{sen}(2k\pi t)\big)$$

(tu respuesta debería de ser un cociente de senos).

18. Sea $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$ y $w=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{n}$. Dado un número entero $m\in\mathbb{Z}$, calcúlese el valor de las expresiones:

a) $1+w^m+w^{2m}+\cdots+w^{(n-1)m}$;

b) $1-w^m+w^{2m}-\cdots+(-1)^{n-1}w^{(n-1)m}$.

19. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre prueba que:

a) $\operatorname{sen} 3\varphi = 3\operatorname{sen}\varphi - 4\operatorname{sen}^3\varphi$;

b) $\cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1$;

c) $\operatorname{sen} 5\varphi = 5\operatorname{sen}\varphi - 20\operatorname{sen}^3\varphi + 16\operatorname{sen}^5\varphi$.

20. Representar gráficamente los conjuntos de números complejos z que verifican:

$$|z-3| \leqslant 3; \quad 2 < |z-i| \leqslant 3; \quad |\arg z| < \pi/6; \quad |z-i| + |z+i| = 4$$
$$|z-1| = |z-2i|; \quad \left|\frac{z-i}{z+2i}\right| = 2; \quad \operatorname{Im}(z^2) > 6; \quad |z-i| = \operatorname{Im} z + 1$$

21. Encuentra los vértices de un polígono regular de n lados si su centro se encuentra en el punto $z = 0$ y uno de sus vértices z_1 es conocido.

22. Resuelve la ecuación $(z-1)^n = (z+1)^n$, donde $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

23. Sea $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Prueba que z_1, z_2, z_3 son vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

24. Si $0 \leqslant \arg w - \arg z < \pi$, prueba que el área del triángulo de vértices 0, z y w viene dada por $\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\bar{z}w)$.

1.3. Sucesiones de números complejos

Un poco de topología

Dados $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, el conjunto

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$$

se llama **disco abierto** de centro a y radio r. Observa que un disco abierto no puede ser vacío.

Dados $a \in \mathbb{C}$ y $r \geqslant 0$, el conjunto

$$\overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leqslant r\},$$

se llama **disco cerrado** de centro a y radio r. Observa que $\overline{D}(a,0) = \{a\}$.

Un conjunto se llama **acotado** si está contenido en algún disco centrado en el origen. Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que es un conjunto **abierto** si todo punto de Ω es centro de algún disco abierto contenido en Ω. Por convenio el conjunto vacío se considera abierto. Un conjunto se llama **cerrado** si su complementario es abierto. Un conjunto abierto no vacío con la propiedad de que dos puntos cualesquiera del mismo pueden unirse por una curva sin salirse del conjunto se llama un **dominio**. Una definición equivalente aunque menos intuitiva de dominio es la siguiente. Un dominio es un conjunto abierto no vacío, Ω, cuya única descomposición en la forma $\Omega = A \cup B$, donde A y B son conjuntos abiertos disjuntos, es la trivial, es decir, $\{A, B\} = \{\emptyset, \Omega\}$. Un conjunto cerrado y acotado se llama un conjunto **compacto**.

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, se dice que un punto $z \in \mathbb{C}$ es un punto de acumulación de A si todo disco abierto con centro en z contiene puntos de A distintos de z. Observa que un punto z puede ser un punto de acumulación de A y no pertenecer a A.

Una sucesión de números complejos es una aplicación del conjunto de los números naturales en $\mathbb{C}$. Como es usual, representaremos por $\{z_n\}$ la sucesión dada por $n \mapsto z_n$ donde $z_n \in \mathbb{C}$. La definición de sucesión convergente es exactamente la misma que para sucesiones reales.

Definición 1.3. La sucesión de números complejos $\{z_n\}$ converge a un número complejo z si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $|z_n - z| < \varepsilon$. Equivalentemente, $\{z_n\}$ converge a z si $|z_n - z| \to 0$.

Recordemos que $\text{máx}\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$. Gracias a esta desigualdad tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \\ |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \end{array}\right\} \leqslant |z_n - z| \leqslant |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|$$

Deducimos que $|z_n - z| \to 0$ si, y sólo si, $|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \to 0$ y $|\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \to 0$. Hemos probado así el siguiente resultado.

Proposición 1.4. *Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es convergente si, y sólo si, las sucesiones de números reales $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son convergentes. Además en dicho caso*

$$\text{lím}\{z_n\} = z \Longleftrightarrow \operatorname{Re} z = \text{lím}\{\operatorname{Re} z_n\} \quad y \quad \operatorname{Im} z = \text{lím}\{\operatorname{Im} z_n\}$$

Gracias a este resultado el estudio de sucesiones de números complejos se reduce a estudiar la convergencia de dos sucesiones de números reales.

Supongamos que $\{z_n\}$ es una sucesión tal que para todo $K > 0$ existe un número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que si $n \geqslant n_0$ entonces $|z_n| \geqslant K$. En dicho caso diremos que la sucesión $\{z_n\}$ es divergente o que **diverge** y escribiremos $\{z_n\} \to \infty$. Observa que $\{z_n\} \to \infty$ es lo mismo que $\{|z_n|\} \to +\infty$.

Los resultados que conoces para sucesiones de números reales en los que no interviene el orden son también válidos para sucesiones de números complejos. Destacamos entre ellos los más importantes.

Proposición 1.5 (Álgebra de límites).

- *Si* $\{z_n\} \to z$ *y* $\{w_n\} \to w$, *entonces* $\{z_n + w_n\} \to z + w$ *y* $\{z_n w_n\} \to zw$. *Además, si* $z_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $z \neq 0$, *entonces* $\{1/z_n\} \to 1/z$.
- *Si* $\{z_n\}$ *diverge y* $\{w_n\}$ *está acotada entonces* $\{z_n + w_n\}$ *diverge.*
- *Si* $\{z_n\}$ *diverge y* $\{w_n\}$ *está separada de* 0, *esto es, existe* $\rho > 0$ *y* $n_0 \in \mathbb{N}$ *de forma que para* $n \geqslant n_0$ *se cumple* $|w_n| \geqslant \rho$, *entonces* $\{z_n w_n\}$ *diverge.*

Recuerda que una **sucesión parcial** de una sucesión $\{z_n\}$ es cualquier sucesión de la forma $\{z_{\sigma(n)}\}$ donde $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una aplicación estrictamente creciente.

Teorema 1.6 (de Bolzano–Weierstrass). *Toda sucesión acotada de números complejos tiene alguna sucesión parcial convergente.*

Definición 1.7. Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ se dice que es de Cauchy si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que si $p, q \geqslant n_0$ entonces $|z_p - z_q| < \varepsilon$

Repitiendo el mismo argumento anterior, deducimos que $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy si, y sólo si, $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son sucesiones de Cauchy. Puesto que $\mathbb{R}$ es completo, ser de Cauchy equivale a ser convergente, luego si $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son de Cauchy convergen y, por tanto, $\{z_n\}$ es convergente.

Teorema 1.8 (de complitud). *Toda sucesión de Cauchy de números complejos es convergente.*

1.3.1. Series de números complejos

Dada una sucesión, $\{z_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{S_n\}$, cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de $\{z_n\}$, es decir:

$$S_1 = z_1,\ S_2 = z_1 + z_2,\ S_3 = z_1 + z_2 + z_3, \ldots, S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

La sucesión $\{S_n\}$ así obtenida se llama *serie de término general* z_n y es costumbre representarla por $\sum\limits_{n \geqslant 1} z_n$ o, más sencillamente, $\sum z_n$.

Ni que decir tiene que, siendo las series sucesiones, *todos los conceptos y resultados estudiados ya para sucesiones conservan su misma significación cuando se aplican a series.*

En particular, es innecesario volver a definir qué se entiende cuando se dice que una serie es "convergente". Si una serie $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ es convergente se usa el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ para representar el límite de la serie que suele llamarse suma de la serie. Naturalmente $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es el número complejo definido por

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \text{lím}\{S_n\} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} z_k$$

Como caso particular de la proposición 1.4, la serie $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ converge si, y sólo si, las series

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{n\geqslant 1} z_n\right) = \sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Re} z_n \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}\left(\sum_{n\geqslant 1} z_n\right) = \sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Im} z_n$$

son convergentes.

Conviene que recuerdes la condición básica *necesaria* para la convergencia de una serie. Si la serie $\sum z_n$ converge entonces la sucesión $z_n = \sum_{j=1}^{n} z_j - \sum_{j=1}^{n-1} z_j$ es diferencia de dos sucesiones que convergen al mismo límite y por tanto converge a cero.

Proposición 1.9. *Condición necesaria para que* $\sum z_n$ *sea convergente es que* $\text{lím}\{z_n\} = 0$.

Para las series es posible definir otro tipo de convergencia, la **convergencia absoluta**.

Definición 1.10. Se dice que una serie de números complejos $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ converge absolutamente si la serie de números reales positivos $\sum_{n\geqslant 1} |z_n|$ es convergente.

Proposición 1.11. *Si una serie de números complejos* $\sum z_n$ *es absolutamente convergente entonces dicha serie también es convergente.*

Demostración. Pongamos $S_n = \sum_{j=1}^{n} z_j$, $A_n = \sum_{j=1}^{n} |z_j|$ y supongamos que la sucesión $\{A_n\}$ es convergente, es decir, $\sum z_n$ es absolutamente convergente. Dado $\varepsilon > 0$, la condición de Cauchy para $\{A_n\}$ nos dice que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|A_q - A_p\right| = \sum_{k=p+1}^{q} |z_k| < \varepsilon \quad \text{para todos } p,q\in\mathbb{N} \text{ tales que } q > p \geqslant n_0$$

Deducimos que para todos $p,q\in\mathbb{N}$ tales que $q > p \geqslant n_o$ se verifica que

$$\left|S_q - S_p\right| = \left|z_{p+1} + z_{p+2} + \cdots + z_q\right| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} |z_k| < \varepsilon$$

Lo que prueba que la sucesión $\{S_n\}$, es decir, la serie $\sum z_n$ cumple la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente. $\boxed{\checkmark}$

De hecho, el concepto de convergencia absoluta de una serie es mucho más fuerte que el de convergencia como se pone de manifiesto en el siguiente resultado que no demostraremos.

Teorema 1.12 (de Riemann). *La serie* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} z_n$ *converge absolutamente si, y sólo si, para toda biyección* $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *la serie* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} z_{\pi(n)}$ *es convergente. Además, en tal caso se verifica que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)}$$

Criterios de convergencia no absoluta para series

Naturalmente, puedes usar los criterios de convergencia para series de números reales positivos, que ya debes conocer, para estudiar la convergencia absoluta de una serie de números complejos. Pero, ¿qué hacer cuando una serie no es absolutamente convergente? Naturalmente, podemos intentar comprobar si la serie verifica la condición de Cauchy, pero este procedimiento con frecuencia es difícil. Pues bien, los siguientes criterios de Dirichlet y Abel proporcionan información sobre la convergencia no absoluta.

Teorema 1.13. . *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números reales y* $\{z_n\}$ *una sucesión de números complejos.*

Criterio de Dirichlet. *Si* $\{a_n\}$ *es monótona y converge a cero y la serie* $\sum z_n$ *tiene sumas parciales acotadas, entonces* $\sum a_n z_n$ *converge.*

Criterio de Abel. *Si* $\{a_n\}$ *es monótona y acotada y la serie* $\sum z_n$ *converge, entonces* $\sum a_n z_n$ *es convergente.*

1.3.2. Ejercicios

1. Estudia la convergencia de las sucesiones:

i) $z_n = \sqrt[n]{n} + i\,n\,a^n \quad (a \in \mathbb{R}, |a| < 1)$ ii) $z_n = \dfrac{2^n}{n} + \dfrac{i\,n}{2^n}$

iii) $z_n = \sqrt[n]{a} + i \operatorname{sen}\dfrac{1}{n} \quad (a > 0)$ iv) $z_n = n \operatorname{sen}\dfrac{1}{n} + 5\,i \cos\dfrac{1}{n}$

v) $z_n = \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$ vi) $z_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

2. Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos no nulos y para todo $n \in \mathbb{N}$ sea $\varphi_n \in \operatorname{Arg}(z_n)$. Supongamos que $\{\varphi_n\} \to \varphi$ y $\{|z_n|\} \to \rho$. Justifica que la sucesión $\{z_n\} \to \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$.

3. Calcula el límite de la sucesión $z_n = \left(1 + \dfrac{\sqrt{2} + i\frac{\pi}{3}}{n}\right)^n$.

Sugerencia: Expresa $z_n = |z_n|(\cos\varphi_n + i \operatorname{sen}\varphi_n)$ y usa el ejercicio anterior.

4. Calcula el límite de la sucesión $z_n = n\left(\sqrt[n]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2n} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2n}\right) - 1\right)$.

Sugerencia: Recuerda que el límite de la sucesión $n\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)$ es bien conocido.

5. Sea $z \in \mathbb{C}$, con $|z| = 1$, $z \neq 1$. Prueba que la sucesión $\{z^n\}$ no converge (¿qué pasa si supones que converge?). Deduce que si φ es un número real que no es un múltiplo entero de π, las sucesiones $\{\cos(n\varphi)\}$ y $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ no convergen.

6. Estudia la convergencia de las series:

i) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(1+i)^n}$ ii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos n + i \operatorname{sen} n}{n}$

iii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos n + i \operatorname{sen} n}{n^2}$ iv) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos\frac{\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{n}$

v) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2+i)^n}{(1+2i)^n}\frac{1}{n}$ vi) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$

vii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\cos\frac{\pi}{n^2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{n^2}\right)$ viii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(3+4i)^n}{2i(4+3i)^n + 7}$

7. Sea $\rho \in \mathbb{R}$ con $|\rho| < 1$ y $\vartheta \in \mathbb{R}$. Calcula los límites $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos(n\vartheta)$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \operatorname{sen}(n\vartheta)$.

1.4. Funciones complejas

Las funciones complejas no son más que las funciones definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ con valores en $\mathbb{R}^2$ cuando en $\mathbb{R}^2$ consideramos su estructura compleja. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, a toda función compleja $f : A \to \mathbb{C}$ se le asocian dos funciones reales: la función $u = \operatorname{Re} f$ "parte real de f" y la función $v = \operatorname{Im} f$ "parte imaginaria de f" definidas para todo $(x,y) = x + iy \in A$ por:

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy), \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$$

Naturalmente, $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z)$.

La **función conjugada** de f es la función $\overline{f}$ dada por $\overline{f}(z) = \operatorname{Re} f(z) - i \operatorname{Im} f(z)$. La **función módulo** de f es la función $|f|$ dada por $|f|(z) = |f(z)|$.

1.4.1. Continuidad y límite funcional

Definición 1.14. Se dice que la función $f : A \to \mathbb{C}$ es continua en un punto $a \in A$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} z \in A \\ |z-a| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon.$$

Usando una vez más las desigualdades

$$\text{máx}\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

se prueba fácilmente que una función compleja f es continua en a si, y sólo si, las funciones $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$ son continuas en a.

Definición 1.15. Dado un punto a de acumulación de A, se dice $f : A \to \mathbb{C}$ tiene límite en a si hay un número complejo $L \in \mathbb{C}$ con la propiedad de que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} z \in A \\ 0 < |z-a| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Simbólicamente escribimos $\displaystyle\lim_{z \to a} f(z) = L$.

Usando las desigualdades anteriores y llamando $a = \alpha + i\beta$, $L = \lambda + i\mu$ tenemos

$$\lim_{z \to a} f(z) = L \iff \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \operatorname{Re} f(x,y) = \lambda \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \operatorname{Im} f(x,y) = \mu \end{array}\right.$$

Se dice que $f : A \to \mathbb{C}$ tiene límite en infinito si hay un número complejo $L \in \mathbb{C}$ con la propiedad de que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $K > 0$ tal que si $|z| > K$ entonces $|f(z) - L| < \varepsilon$. Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = L$.

Se dice que $f : A \to \mathbb{C}$ tiene límite infinito en infinito si para todo $M > 0$ existe $K > 0$ tal que si $|z| > K$ entonces $|f(z)| > M$. Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

Se dice que $f : A \to \mathbb{C}$ tiene límite infinito en un punto a de acumulación de A si para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} z \in A \\ 0 < |z - \alpha| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(z)| > M$$

Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.

Observa que hay una completa analogía formal entre las definiciones anteriores y las correspondientes para funciones reales de una variable real. Por ello, las reglas de cálculo de límites conocidas para funciones de una variable real son también válidas, con las mismas demostraciones, para funciones de variable compleja.

El siguiente resultado, aunque elemental, es importante.

Proposición 1.16 (Continuidad del argumento principal). *La función argumento principal es continua en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-_o$ y es discontinua en $\mathbb{R}^-$.*

Demostración. Sabemos que para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-_o$ el argumento principal viene dado por

$$\arg z = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}$$

Teniendo en cuenta que la función arcotangente es continua y que $\operatorname{Re} z + |z| > 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-_o$, deducimos que el argumento principal es continuo en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-_o$.

Sea $a \in \mathbb{R}^-$ y $z_n = a + \dfrac{(-1)^n}{n}$. Claramente $\{z_n\} \to a$, pero como

$$\arg(z_{2n}) = \operatorname{arc\,tg}(1/na) + \pi \to \pi \qquad \arg(z_{2n-1}) = \operatorname{arc\,tg}(-1/na) - \pi \to -\pi$$

concluimos que $\{\arg(z_n)\}$ no converge y por tanto el argumento principal es discontinuo en a.

1.4.2. Derivada de una función de variable compleja

Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $f : A \to \mathbb{C}$, se dice que f es derivable en un punto $a \in A \cap A'$ si existe el límite

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \in \mathbb{C}.$$

El valor de dicho límite se representa por $f'(a)$ y se llama derivada de f en el punto a.

La única novedad de la definición es que se está utilizando el producto complejo y eso, como veremos, hace que la condición de derivabilidad en sentido complejo sea mucho más fuerte que la derivabilidad para funciones reales.

Casos Particulares

- Cuando $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f(A) \subseteq \mathbb{R}$, la definición dada coincide con la conocida para una función real de variable real
- Para funciones complejas de una variable real se tiene el siguiente resultado.

  Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{C}$. Entonces la función f es de la forma
  $$f(t) = u(t) + iv(t)$$
  donde u y v son funciones reales de variable real. En este caso tenemos:
  $$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \frac{u(t) - u(a)}{t - a} + i\frac{v(t) - v(a)}{t - a}$$
  y deducimos que f es derivable en a si, y sólo si, las funciones u y v son derivables en a, en cuyo caso
  $$f'(a) = u'(a) + iv'(a)$$

Observa que hay una completa analogía formal entre el concepto de función derivable para funciones de variable compleja y para funciones reales de una variable real. Por ello, las reglas de derivación conocidas para funciones de una variable real son también válidas, con las mismas demostraciones, para funciones de variable compleja.

Proposición 1.17 (Reglas de derivación). *Sean dos funciones $f, g : A \to \mathbb{C}$ con $A \subseteq \mathbb{C}$ y $a \in A \cap A'$. Supongamos que f y g son derivables en a. Entonces:*

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
- *Si $g(z) \neq 0$ para todo $z \in A$ entonces*
  $$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{\big(g(a)\big)^2}$$

- ***Regla de la cadena***. *Sean* $f : A \to \mathbb{C}$ *y* $g : B \to \mathbb{C}$ *tales que* $f(A) \subseteq B$, *y consideremos la función compuesta* $h = g \circ f : A \to \mathbb{C}$. *Supongamos que* f *es derivable en* $a \in A \cap A'$ *y* g *es derivable en* $b = f(a) \in B \cap B'$. *entonces* h *es derivable en* a *y*

$$h'(a) = g'\big(f(a)\big) f'(a) = g'(b) f'(a)$$

El siguiente resultado pone de manifiesto que la derivabilidad compleja es mucho más restrictiva de lo que puede parecer a primera vista.

1.4.3. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

El siguiente resultado pone de manifiesto que la derivabilidad compleja es mucho más restrictiva de lo que puede parecer a primera vista.

Teorema 1.18 (Relación ente la derivabilidad compleja y la diferenciabilidad real). *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un conjunto abierto,* a *un punto de* Ω *y* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *una función de* Ω *en* $\mathbb{C}$. *Notemos* $a = \alpha + i\beta$, $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$. *Equivalen las siguientes afirmaciones:*

i) f *es derivable (en sentido complejo) en* $a = \alpha + i\beta$.

ii) *Las funciones* $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$ *son diferenciables en* (α,β) *y además*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,\beta) &= \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha,\beta) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha,\beta) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha,\beta) \end{aligned}\right\} \text{Ecuaciones de Cauchy–Riemann}$$

En caso de que se cumplan i) y ii) se tiene

$$f'(a) = f'(\alpha + i\beta) = \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,\beta) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha,\beta)$$

Demostración. Por definición, f es derivable si, y sólo si existe un número complejo, la derivada de f en a, $f'(a) = \lambda + i\mu$ que verifica

$$\lim_{z\to a} \frac{|f(z) - f(a) - (\lambda + i\mu)(z-a)|}{|z-a|} = 0.$$

Pongamos $z = x + iy$. Si tenemos en cuenta la igualdad

$$(\lambda + i\mu)(x + iy - \alpha - i\beta) = \lambda(x-\alpha) - \mu(y-\beta) + i[\mu(x-\alpha) + \lambda(y-\beta)]$$

y el hecho de que el módulo de un complejo coincide con la norma euclídea (visto en $\mathbb{R}^2$), el límite anterior se escribe como sigue:

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \frac{\|(u(x,y),v(x,y)) - (u(\alpha,\beta),v(\alpha,\beta)) - (\lambda(x-\alpha)-\mu(y-\beta),\mu(x-\alpha)+\lambda(y-\beta))\|}{\|(x,y)-(\alpha,\beta)\|} = 0$$

o bien, como $(\lambda(x-\alpha)-\mu(y-\beta),\mu(x-\alpha)+\lambda(y-\beta)) = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \end{pmatrix}$,

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \frac{\left\|(u(x,y),v(x,y)) - (u(\alpha,\beta),v(\alpha,\beta)) - \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \end{pmatrix}\right\|}{\|(x,y)-(\alpha,\beta)\|} = 0.$$

La condición anterior quiere decir que la aplicación $(x,y) \mapsto (u(x,y),v(x,y))$ de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es diferenciable en (α,β) y su diferencial es la aplicación lineal dada por $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Por tanto $\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$ es la matriz jacobiana de la aplicación $(x,y) \mapsto (u(x,y),v(x,y))$ en (α,β), esto es

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,\beta) = \lambda,\ \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha,\beta) = -\mu,\ \frac{\partial v}{\partial x}(\alpha,\beta) = \mu,\ \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha,\beta) = \lambda$$

Finalmente

$$f'(a) = f'(\alpha+i\beta)\lambda + i\mu = \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,\beta) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha,\beta)$$

$\boxed{\checkmark}$

Este resultado explica porqué si defines, sin pensarlo mucho, una función compleja en la forma $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ lo más probable es que, a pesar de lo buenas que puedan ser las funciones u y v, la función así definida no sea derivable. Pues las funciones u y v no tienen por qué verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Esto indica (aunque esta es una idea difícil de precisar) que las funciones complejas derivables son “auténticas funciones complejas” en el sentido de que si la función $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ es derivable entonces la expresión $u(x,y)+iv(x,y)$ debe depender únicamente de la variable z. Los siguientes ejemplos son ilustrativos.

Ejemplos 1.19.

- $f(x+iy) = x$ no es derivable en ningún punto.
- $f(z) = z|z|^2$ sólo es derivable en cero.
- $f(x+iy) = e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y)$ es derivable en todo $\mathbb{C}$ y $f'(z) = f(z)$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

1.4.4. Primeras propiedades de las funciones holomorfas

Definición 1.20. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$. Una función $f:\Omega\to\mathbb{C}$ se dice que es **holomorfa** en Ω si f es derivable en todo punto de Ω. En tal caso la función definida para $z\in\Omega$ por $z\mapsto f'(z)$ se llama **función derivada** de f. Notaremos por $\mathcal{H}(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω. Las funciones holomorfas en todo el plano complejo se llaman **funciones enteras**.

Ejemplos 1.21.

- Las funciones polinómicas, es decir, las funciones de la forma

$$p(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n$$

  donde $c_k\in\mathbb{C}$ para $0\leqslant k\leqslant n$, son funciones enteras. La función derivada de p viene dada por

$$p'(z)=c_1+2c_2z+3c_3z^2+\cdots+nc_nz^{n-1}\qquad(z\in\mathbb{C})$$

- Las funciones racionales, es decir, las funciones de la forma $R(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ donde $p(z)$ y $q(z)$ son funciones polinómicas, son holomorfas en su dominio natural de definición $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:q(z)\neq 0\}$. La función derivada de R viene dada por

$$R'(z)=\frac{p'(z)q(z)-p(z)q'(z)}{q(z)^2}\qquad(z\in\Omega)$$

Propiedades de las funciones holomorfas

Como consecuencia de las reglas de derivación tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.22. *El conjunto $\mathcal{H}(\Omega)$ de las funciones holomorfas en un abierto Ω con la suma y el producto usual de funciones es un álgebra.*

Proposición 1.23. *Una función holomorfa en un dominio cuya derivada es nula en todo punto es constante.*

Demostración. Sea Ω un dominio, $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f'(z)=0$ para todo $z\in\Omega$. Fijado $z_0\in\Omega$, definimos

$$A=\{z\in\Omega:\ f(z)=f(z_0)\}$$

A es no vacío y, por ser f continua, es un cerrado relativo de Ω. Veamos que también es abierto. Sea $a\in A$ y como Ω es abierto, existe $r>0$ tal que $D(a,r)\subset\Omega$. Tomamos $b\in D(a,r)$

y definimos $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ por $\varphi(t) = f((1-t)a + tb)$. Como f es derivable, la regla de la cadena nos dice que φ es derivable y

$$\varphi'(t) = f'((1-t)a + tb)(b-a) = 0$$

Por ser φ una función compleja de variable real tenemos

$$\varphi'(t) = (\operatorname{Re}\varphi)'(t) + i(\operatorname{Im}\varphi)' = 0 \qquad (t \in [0,1])$$

Luego $(\operatorname{Re}\varphi)'(t) = 0$ y $(\operatorname{Im}\varphi)'(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$. Puesto que $\operatorname{Re}\varphi$ y $\operatorname{Im}\varphi$ son funciones reales de variable real definidas en $[0,1]$, se sigue que son constantes. Luego φ es constante y por tanto $\varphi(0) = f(a) = \varphi(1) = f(b)$ luego $b \in A$. Hemos probado que $D(a,r) \subset A$, luego A es abierto. El hecho de que Ω sea un dominio permite concluir que $A = \Omega$, es decir, f es constante en Ω. $\boxed{\checkmark}$

Corolario 1.24. *Si dos funciones holomorfas tienen la misma derivada sobre un dominio y coinciden en un punto son iguales.*

La siguiente proposición vuelve a poner de manifiesto que la condición de que una función sea holomorfa es mucho más restrictiva que la derivabilidad real.

Proposición 1.25. *Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

(I) $\operatorname{Re} f$ *es constante en* Ω

(II) $\operatorname{Im} f$ *es constante en* Ω

(III) *La función compleja conjugada de f, $\overline{f}$, es holomorfa en* Ω

(IV) f *es constante en* Ω

(V) $|f|$ *es constante en* Ω

Demostración. Pongamos $f = u + iv$, con $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Es claro que la condición (iv) implica todas las demás.

$(i) \Rightarrow (iv)$ Las ecuaciones de Cauchy–Riemann afirman que

$$f'(z) = f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \qquad (z = x+iy \in \Omega)$$

Puesto que $\operatorname{Re} f$ es constante tenemos $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$ lo que implica que $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$ de donde deducimos (iv) gracias a la proposición anterior.

$(ii) \Rightarrow (iv)$ Puesto que $\operatorname{Im} f = -\operatorname{Re}(if)$ la implicación $(i) \Rightarrow (iv)$ ya probada nos dice que la función if es constante y, por lo tanto, f también lo es.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Como f es holomorfa y $\overline{f}$ lo es por hipótesis tenemos que $f + \overline{f} = 2\operatorname{Re} f$ es holomorfa. Puesto que $\operatorname{Im}(\operatorname{Re} f) = 0$ es constante, deducimos, por $(ii) \Rightarrow (iv)$, que $\operatorname{Re} f$ es constante y por $(i) \Rightarrow (iv)$ concluimos que f es constante.

$(v) \Rightarrow (iv)$ Si $|f| = \alpha$ entonces $f(z)\overline{f}(z) = \alpha^2$. Si $\alpha = 0$ entonces f es idénticamente nula y hemos acabado. Si $\alpha \neq 0$ entonces f no se anula en ningún punto por lo que $\overline{f}(z) = \dfrac{\alpha^2}{f(z)}$ es holomorfa en Ω y, por $(iii) \Rightarrow (iv)$, concluimos que f es constante. $\boxed{\checkmark}$

Observa que estas propiedades de las funciones holomorfas están muy lejos de ser ciertas para funciones reales diferenciables. Por ejemplo, dada una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ diferenciable que no se anule nunca, dividiéndola por su norma obtenemos una función diferenciable cuyo módulo (norma euclídea) es constante.

1.4.5. Ejercicios

1. Consideremos la función dada para $z \neq 0$ por $f(z) = \dfrac{\overline{z}^2}{z}$, y $f(0) = 0$. ¿En qué puntos verifica f las ecuaciones de Cauchy-Riemann? ¿Es f derivable en $z = 0$?.

2. Sea Ω un abierto y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sean $\Omega^* = \{z : \overline{z} \in \Omega\}$ y $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ la función definida por: $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}, \quad \forall z \in \Omega^*$. Prueba que f^* es holomorfa en Ω^*.

3. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que hay números $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 > 0$, tales que $a \operatorname{Re} f(z) + b \operatorname{Im} f(z) = c$ para todo $z \in \Omega$. Prueba que f es constante en Ω.

4. Calcula una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $\operatorname{Re} f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Si se exige que sea $f(0) = 0$, entonces dicha función es única.

5. Encuentra una condición necesaria y suficiente que deben cumplir los números reales a, b, c para que exista una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, verificando que

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = ax^2 + bxy + cy^2$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Determina, cuando dicha condición se cumpla, todas las funciones enteras f cuya parte real es de la forma indicada.

1.5. Funciones complejas elementales

1.5.1. La función exponencial

Una de las formas de definir la exponencial de un número real x es mediante el límite

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Por tanto, una forma coherente de definir la exponencial de un número complejo sería calcular el anterior límite para $z\in\mathbb{C}$. Llamemos $z = x+iy$. Consideraremos que $y\neq 0$, puesto que si $y = 0$ tendríamos que $z = x$ sería un número real. Pongamos $w_n = 1+z/n$ y

$$\varphi_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{y/n}{1+x/n}$$

Sea n_o tal que para $n \geqslant n_o$ se verifique que $\operatorname{Re}(w_n) > 0$. Entonces, para $n \geqslant n_o$ resulta que $\varphi_n = \arg(w_n)$. Por otra parte, el módulo de w_n viene dado por

$$|w_n|^2 = \left|1+\frac{z}{n}\right|^2 = \left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}$$

Tenemos ahora, gracias a la fórmula de De Moivre que

$$(w_n)^n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2}(\cos(n\varphi_n) + i\operatorname{sen}(n\varphi_n))$$

Pero, por el criterio de equivalencia logarítmica, es

$$\lim|w_n|^n = \lim\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2} = \exp\left(\lim\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)\right) = e^x$$

Además, la sucesión $\{\varphi_n\}$ es asintóticamente equivalente a la sucesión $\left\{\dfrac{y/n}{1+x/n}\right\}$. Por tanto

$$\lim\{n\varphi_n\} = \lim\{n\frac{y/n}{1+x/n}\} = y$$

En consecuencia, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}(w_n)^n = \lim_{n\to\infty}|w_n|^n\big(\cos(n\varphi_n)+i\operatorname{sen}(n\varphi_n)\big) = e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y)$$

Definimos, por tanto, la exponencial compleja como

$$e^z = \exp z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^{\operatorname{Re} z}\big(\cos(\operatorname{Im} z) + i\operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\big)$$

Observa que

$$|\,e^z\,| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Im} z\in\operatorname{Arg}(e^z)$$

En particular, obtenemos la llamada *fórmula de Euler*:

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t \qquad (\text{para todo } t \in \mathbb{R})$$

que establece una relación entre la exponencial compleja y las funciones trigonométricas. Haciendo $t = \pi$ tenemos la singular igualdad

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

en la que intervienen los números más importantes de las matemáticas.

De la fórmula de Euler se deducen fácilmente las llamadas *ecuaciones de Euler*:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann se deduce que la función exponencial es una función entera y $\exp'(z) = \exp(z)$. Se prueba fácilmente que $e^{z+w} = e^z e^w$ para todos $z, w \in \mathbb{C}$. Se deduce que para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $k \in \mathbb{Z}$ es

$$e^z = e^{z+2k\pi i}$$

Lo que nos dice que la exponencial compleja es una función **periódica** con período $2\pi i$. Naturalmente, esto supone una gran diferencia con la exponencial real que es una función inyectiva. Observa que la exponencial no se anula nunca pues $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} > 0$.

1.5.2. Logaritmos complejos

El comportamiento periódico de la exponencial compleja se va a traducir, como vamos a ver enseguida, en que la ecuación $e^w = z$, donde z es un número complejo no cero, va a tener infinitas soluciones $w \in \mathbb{C}$. Como

$$e^w = e^{\operatorname{Re} w}\big(\cos(\operatorname{Im} w) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} w)\big)$$

Para que $e^w = z$ es necesario y suficiente que:

1. $|e^w| = |z|$, esto es, $e^{\operatorname{Re} w} = |z|$, es decir, $\operatorname{Re} w = \log|z|$ (logaritmo natural del número real positivo $|z|$).
2. $\operatorname{Arg}(e^w) = \operatorname{Arg}(z)$, esto es, $\operatorname{Im} w \in \operatorname{Arg} z$ y esto se cumple si, y sólo si $\operatorname{Im} w = \arg(w) + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Hemos probado que

$$\{w\in\mathbb{C} : \mathrm{e}^{w} = z\} = \{\log|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), k\in\mathbb{Z}\}$$

Por tanto, existen infinitos números complejos w que satisfacen la ecuación $\mathrm{e}^{w} = z$. Cualquiera de ellos se llama **un logaritmo** de z. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Log} z$. De entre todos ellos elegimos uno, llamado **logaritmo principal**, definido por

$$\log z = \log|z| + i\arg(z) \qquad \text{para todo } z\in\mathbb{C}^{*}$$

Observa que cualquier otro logaritmo de z es de la forma $\log(z) + i2k\pi$ para algún entero k. Es importante que observes que la igualdad

$$\log zw = \log z + \log w$$

que es válida para los logaritmos de los números reales positivos, no es siempre cierta cierta para números complejos. Por ejemplo:

$$\log(-1+i\sqrt{3}) = \log|-1+i\sqrt{3}| + i\arg(-1+i\sqrt{3}) = \log 2 + i(\arctan(-\sqrt{3}) + \pi) = \log 2 + i\frac{2\pi}{3}$$

$$\log(-\sqrt{3}+i) = \log|-\sqrt{3}+i| + i\arg(-\sqrt{3}+i) = \log 2 + i(\arctan(-1/\sqrt{3}) + \pi) = \log 2 + i\frac{5\pi}{6}$$

$$\log((-1+i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i)) = \log(-4i) = \log 4 - i\frac{\pi}{2} \neq \log(-1+i\sqrt{3}) + \log(-\sqrt{3}+i) = \log 4 + i\frac{3\pi}{2}$$

Lo que está claro es que el número $\log z + \log w \in \operatorname{Log}(zw)$, es decir, $\log z + \log w$ es **un** logaritmo de zw pero no tiene por qué ser el logaritmo **principal** de zw.

Como la función $z \to \arg z$ es continua en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{o}^{-}$ y discontinua en $\mathbb{R}_{o}^{-}$, se deduce que el logaritmo principal es discontinuo en $\mathbb{R}_{o}^{-}$ y continuo en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{o}^{-}$. De hecho, el logaritmo principal es una función holomorfa en el dominio $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{o}^{-}$. Esto puedes probarlo usando las condiciones de Cauchy-Riemann aunque en este caso es más fácil proceder como sigue. Sea $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{o}^{-}$ y $b = \log a$. La función

$$h(w) = \frac{\mathrm{e}^{w} - \mathrm{e}^{b}}{w-b}, \quad h(b) = \mathrm{e}^{b}$$

es continua en todo $\mathbb{C}$. Además $h(b) \neq 0$ y, por tanto, hay algún $r > 0$ tal que $h(w) \neq 0$ para todo $w\in D(b,r)$. Como la función logaritmo principal es continua en a, deducimos que hay un $s > 0$ tal que $w = \log z\in D(b,r)$ siempre que $z\in D(a,s)$. Teniendo en cuenta que la función logaritmo principal es inyectiva, podemos escribir para $z\in D(a,s)$:

$$\frac{\log z - \log a}{z-a} = \frac{1}{h(\log z)} \Longrightarrow \lim_{z\to a}\frac{\log z - \log a}{z-a} = \frac{1}{h(\log a)} = \frac{1}{a}$$

Hemos probado, pues, que $\log'(z) = \dfrac{1}{z}$ para todo $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{o}^{-}$.

1.5.3. Potencias complejas

Recuerda que dados dos números reales $a>0$ y $b\in\mathbb{R}$, la potencia de base a y exponente b se define como $a^b=e^{b\log a}$. Ahora, dados $a,b\in\mathbb{C}$, con $a\neq 0$, sabemos que hay infinitos logaritmos de a, todos ellos son de la forma $\log a+i2k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$. Por ello, cualquier número complejo de la forma $\mathrm{e}^{b(\log a+i2k\pi)}$ donde $k\in\mathbb{Z}$, es **una** potencia de base a y exponente b. De todas ellas se destaca una:

$$a^b=\mathrm{e}^{b\log a}$$

y dicho número se llama **valor principal** de la potencia de base a y exponente b. Observa que si $b=1/n$ donde $n\in\mathbb{N}$, el número

$$a^{1/n}=\exp\left(\frac{1}{n}\log a\right)=\exp\left(\frac{\log a}{n}+i\frac{\arg a}{n}\right)=|z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg a}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\arg a}{n}\right)$$

es el valor principal de la raíz n-ésima de a que antes hemos notado por $\sqrt[n]{a}$.

La definición anterior da lugar a las funciones exponenciales complejas de base a, $z\longmapsto a^z$, definidas por $a^z=\exp(z\log a)$ que son holomorfas en todo el plano.

Por otro lado la función potencia compleja de exponente b, $z\longmapsto z^b$, definida por $z^b=\exp(b\log z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$.

Las funciones exponenciales cumplen evidentemente la igualdad $a^{z+w}=a^z+a^w$ pero las funciones potencias no cumplen, en general como vimos al estudiar las raíces, la propiedad $(zw)^b=z^bw^b$. Esta igualdad se da en el caso de que

$$\exp(b\log(zw))=\exp(b\log z+b\log w)$$

equivalentemente, puesto que la función $\exp$ es periódica de periodo $2\pi i$, cuando se verifique que

$$b\log(zw)=b\log z+b\log w+2k\pi i,\qquad \text{para algún } k\in\mathbb{Z}$$

Como caso particular, cuando z y w pertenecen al primer cuadrante la igualdad $\log(zw)=\log z+\log w$ es cierta con lo cual lo anterior se cumple para $k=0$. Por los mismos motivos la igualdad $(z^b)^c=z^{bc}$ no es cierta en general.

1.5.4. Funciones trigonométricas complejas

Seno y coseno complejos

Las ecuaciones de Euler:

$$\cos t=\frac{\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{-it}}{2},\qquad \operatorname{sen} t=\frac{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it}}{2i}$$

válidas para todo $t \in \mathbb{R}$, también tienen sentido para números complejos. Por ello, para todo $z \in \mathbb{C}$ definimos el coseno y el seno complejos por:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Es inmediato que el seno y coseno complejos extienden a las funciones seno y coseno reales.

Puesto que el coseno y el seno complejos está definidos como combinación de exponenciales sus propiedades se deducen fácilmente a partir de las propiedades de la exponencial.

1. Identidad fundamental $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$
2. $\cos(-z) = \cos(z)$, $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$
3. Fórmulas de adición
$$\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \operatorname{sen} w \cos z$$
$$\cos(z+w) = \cos z \cos w + \operatorname{sen} w \operatorname{sen} z$$
4. Las funciones seno y coseno son derivables en todo $\mathbb{C}$ con $\operatorname{sen}' z = \cos z$, $\cos' z = -\operatorname{sen} z$
5. Relación con las funciones hiperbólicas. Recordando que las funciones hiperbólicas $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$ se definen por:
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
Es de comprobación inmediata que:
$$\cosh x = \cos(ix) \qquad \operatorname{senh}(x) = -i \operatorname{sen}(ix)$$
6. Se cumplen las igualdades
$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$$
$$\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$
$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2$$
$$|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2$$
7. Las funciones seno y coseno complejos no están acotadas, aunque si lo están en bandas acotadas paralelas al eje real.
8. Las funciones seno y coseno complejas no tienen más ceros que los reales, esto es, $\operatorname{sen} z = 0$ si, y sólo si, z es real de la forma $2k\pi$ y $\cos z = 0$ si, y sólo si, z es real de la forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Tangente compleja

Por analogía con la tangente real definimos la función tangente compleja como

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \qquad (\cos z \neq 0)$$

Puesto que el seno y el coseno son funciones enteras la tangente compleja es una función holomorfa en su dominio de definición $\mathbb{C} \setminus \{z : \cos z = 0\}$. Además sabemos que $\cos z = 0$ sólo si z es real de la forma $z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Las propiedades de la tangente se deducen con facilidad de las propiedades del seno y el coseno. Por ejemplo, puedes comprobar que

$$\operatorname{tg}(z+w) = \frac{\operatorname{tg} z + \operatorname{tg} w}{1 - \operatorname{tg} z \operatorname{tg} w}$$

1.5.5. Funciones trigonométricas inversas

Arcocoseno complejo

Dado un número complejo $z \in \mathbb{C}$ se trata de calcular los complejos w tales que $\cos w = z$.

$$\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z \iff e^{iw} + e^{-iw} - 2z = 0$$

puesto que $\exp(w) \neq 0$ para cualquier w, podemos multiplicar por e^{iw} la expresión anterior

$$e^{2iw} - 2z e^{iw} + 1 = 0$$

Poniendo $u = e^{iw}$, la ecuación anterior podemos escribirla $u^2 - 2zu + 1 = 0$, cuyas raíces son

$$u = z \pm \sqrt{z^2 - 1} = z \pm i\sqrt{1 - z^2}$$

Observa que dichas raíces son distintas de 0, de hecho una es inversa de la otra pues su producto es igual a 1. Hemos obtenido que:

$$\exp(iw) = z \pm i\sqrt{1-z^2} \iff iw \in \operatorname{Log}(z \pm i\sqrt{1-z^2}) \iff \cos w = z$$

Naturalmente, hay infinitos valores de w que verifican la igualdad anterior. El conjunto de todos ellos se representa por $\operatorname{Arccos} z$.

$$\operatorname{Arccos} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}(z \pm i\sqrt{1-z^2})$$

De todos ellos elegimos el que corresponde al logaritmo principal y le llamamos valor principal de $\operatorname{Arccos} z$ que está definido por:

$$\arccos z = \frac{1}{i}\log(z+i\sqrt{1-z^2})$$

Veamos que el $\arccos z$ extiende al arcocoseno real. En efecto, para $z = x \in [-1,1]$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\log(x+i\sqrt{1-x^2}) &= \frac{1}{i}\left(\log\left|x+i\sqrt{1-x^2}\right| + i\arg(x+i\sqrt{1-x^2})\right) = \\ &= \frac{1}{i}\left(\log 1 + i\arg(x+i\sqrt{1-x^2})\right) = \\ &= \arg(x+i\sqrt{1-x^2})\end{aligned}$$

Observemos que $(x,\sqrt{1-x^2})$ es un punto de la mitad superior de la circunferencia unidad y una medida del ángulo que forma el número complejo $x+i\sqrt{1-x^2}$ con el eje real positivo es precisamente el arco cuyo coseno es x. Además, para $x\in[-1,1]$ se tiene que $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$. Deducimos que $\arg(x+i\sqrt{1-x^2}) = \arccos x$.

Teniendo en cuenta que $\sqrt{1-z^2} = \exp(\frac{1}{2}\log(1-z^2))$, y que el logaritmo principal es holomorfo en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$, deducimos, por la regla de la cadena, que la función $z \mapsto \sqrt{1-z^2}$ es holomorfa en el conjunto

$$\Omega = \left\{z\in\mathbb{C} : 1-z^2 \notin \mathbb{R}_o^-\right\} = \mathbb{C}\setminus(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[)$$

Análogamente $\log(z+i\sqrt{1-z^2})$ es derivable en el conjunto

$$\Omega_1 = \left\{z\in\mathbb{C} : z+i\sqrt{1-z^2} \notin \mathbb{R}_o^-\right\}$$

Como $z+i\sqrt{1-z^2}$ y $z-i\sqrt{1-z^2}$ son inversos, tenemos que

$$z+i\sqrt{1-z^2}\in\mathbb{R}_o^- \Rightarrow z-i\sqrt{1-z^2}\in\mathbb{R}_o^- \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z\in\mathbb{R}^- \\ \sqrt{1-z^2}\in i\mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow z\in]-\infty,-1]$$

deducimos que $\Omega_1 = \mathbb{C}\setminus]-\infty,-1] \supset \Omega$. Luego el arcocoseno es holomorfo en Ω. La regla de la cadena nos permite calcular su derivada

$$\begin{aligned}\arccos' z &= \frac{1}{i}\,\frac{1+i\dfrac{-z}{\sqrt{1-z^2}}}{z+i\sqrt{1-z^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,\frac{\sqrt{1-z^2}-iz}{iz-\sqrt{1-z^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}\end{aligned}$$

Arcoseno complejo

Dado un número complejo z queremos calcular los complejos w tales que $\operatorname{sen} w = z$. El conjunto de tales números lo representaremos por Arcsen. Aunque podemos repetir el mismo proceso anterior, podemos aprovechar lo ya hecho y observar que

$$\operatorname{sen} w = \cos\left(\frac{\pi}{2} - w\right)$$

luego $\operatorname{sen} w = z$ si, y sólo si, $\frac{\pi}{2} - w \in \frac{1}{i}\operatorname{Log}\left(z \pm i\sqrt{1-z^2}\right)$. Equivalentemente si

$$w \in \frac{\pi}{2} + i\operatorname{Log}\left(z \pm i\sqrt{1-z^2}\right)$$

El valor principal del arcoseno, que notaremos por $\operatorname{arc\,sen} z$, se define eligiendo el logaritmo principal:

$$\operatorname{arc\,sen} z = \frac{\pi}{2} + i\log\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right) \qquad z \in \mathbb{C}$$

y es una función holomorfa en $\mathbb{C}\setminus]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

Arcotangente compleja

Dado $z \in \mathbb{C}$ queremos calcular los números complejos w tales que $z = \operatorname{tg} w$, esto es, $z = \frac{\operatorname{sen} w}{\cos w}$ o, lo que es lo mismo, $z\cos w = \operatorname{sen} w$. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Arctg} z$. Escribiendo la definición de seno y coseno

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z\,\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$

Si $z = \pm i$ la ecuación anterior no tiene solución por lo que consideramos $z \neq \pm i$. Multiplicando por $e^{iw} = u$ la expresión anterior resulta

$$u^2 - 1 = iz(u^2+1) \Rightarrow u^2(1-iz) = 1 + iz$$

puesto que $z \neq -i$ podemos escribir $u^2 = \frac{1+iz}{1-iz}$, esto es,

$$e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz} \Longleftrightarrow w \in \frac{1}{2i}\operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad (z \neq \pm i)$$

Definimos entonces el valor principal de $\operatorname{Arctg} z$ por:

$$\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad (z \neq \pm i)$$

Puedes probar ahora que la función $\operatorname{arc\,tg} z$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i\rho : \rho \in \mathbb{R}, |\rho| > 1\}$

Es fácil probar que la función arcotangente compleja, al igual que ocurre con las demás funciones trigonométricas complejas, extiende a la función arcotangente real.

1.5.6. Ejercicios

1. Expresa los 8 números $\pm 1 \pm i$, $\pm\sqrt{3} \pm i$ en la forma $r\,e^{i\varphi}$.

2. Calcula el módulo y los argumentos principales de los números

$$1+e^{i\varphi},\ 1-e^{i\varphi},\ -a\,e^{i\varphi}$$

donde $|\varphi| \leqslant \pi$ y $a > 0$.

3. Calcula $\log z$ y $\operatorname{Log} z$ cuando z es uno de los números siguientes

$$i,\ -i,\ e^{-3},\ e^{5i},\ 4,\ -5\,e,\ 1+i$$

4. Calcula $\log(3i)+\log(-1+i\sqrt{3})$ y $\log\big(3i(-1+i\sqrt{3})\big)$.

5. Calcula $\log(-1-i)-\log i$ y $\log\left(\dfrac{-1-i}{i}\right)$.

6. Calcula

$$[(-4)^i],\ i^{-3i},\ [i^{2/\pi}],\ [i^i],\ 1^{2i},\ 3^{1-i},\ ((-i)^i)^i,\ (1+i)^{1+i}$$

7. a) Estudia, para $z\in\mathbb{C}^*$ y $n\in\mathbb{N}$, las igualdades:

$$\text{a)}\ \log(\exp(z)) = z\,;\ b)\ \exp(\log(z)) = z\,;\ c)\ \log\left(\frac{1}{z}\right) = -\log(z)\,;$$

$$d)\ \log(\sqrt[n]{z}) = \frac{\log(z)}{n}\,;\ e)\ \log(z^n) = n\log(z).$$

b) Prueba que la función logaritmo establece una biyección entre los conjuntos $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$ y $\Omega = \{z\in\mathbb{C}^* : -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$.

8. Con una interpretación adecuada de la suma justifica que:

$$\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg}(z)+\operatorname{Arg}(w) \qquad \operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z)+\operatorname{Log}(w)$$

9. Estudia, interpretándolas convenientemente cuando sea necesario, las siguientes igualdades:

$$\text{a)}\ \operatorname{Log}[a^b] = b\operatorname{Log}(a) \quad \text{b)}\ \log[a^b] = b\operatorname{Log}(a) \quad \text{c)}\ \log(a^b) = b\log a$$

10. Indica el error en los razonamientos siguientes: $(-z)^2 = z^2$; por tanto $2\operatorname{Log}(-z) = 2\operatorname{Log}(z)$ y, por consiguiente, $\operatorname{Log}(-z) = \operatorname{Log}(z)$.

11. Explica con detalle dónde está el error en las igualdades siguientes:

$$i = (-1)^{1/2} = [(-1)^3]^{1/2} = (-1)^{3/2} = i^3 = -i$$

12. Calcula las partes real e imaginaria de los números

$$\operatorname{sen}(1+i), \quad \cos(1-i), \quad \operatorname{tg}(1+2i)$$

13. Indica los conjuntos de puntos $z \in \mathbb{C}$ donde las funciones e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{arc\,sen} z$, $\operatorname{arc\,tg} z$ toman:

a) Valores reales.

b) Valores imaginarios puros.

14. Calcula $\operatorname{Arcsen}(1+i)$, $\operatorname{Arctg}(1-i)$, $\operatorname{arc\,sen} i$, $\operatorname{arc\,tg} 2i$.

15. Sea $a \in \mathbb{C}$ y $\{z_n\}$ una sucesión de complejos no nulos tal que $\{|z_n|\} \to +\infty$. Justifica que

$$\left\{\left(1+\frac{a}{z_n}\right)^{z_n}\right\} \to \exp(a)\,; \quad \left\{z_n\left(a^{\frac{1}{z_n}}-1\right)\right\} \to \log(a) \quad (a \neq 0)$$

Lección 2

Conceptos básicos de la teoría elemental de series de Fourier

2.1. Introducción

Con el nombre “análisis de Fourier” y también “análisis armónico” se conoce un conjunto de técnicas matemáticas dirigidas a la descomposición de señales en sinusoides (el *análisis* de la señal) y su posterior reconstrucción (la *síntesis* de la señal). La Transformada de Fourier, las Series de Fourier, la Transformada de Fourier Discreta son, junto con otras técnicas del análisis armónico, la base para el procesamiento y digitalización de todo tipo de señales; cuando escuchas música en tu ordenador, usas un escáner o haces una fotografía con una cámara digital, estás usando una tecnología que no sería posible sin dichas técnicas matemáticas. Los métodos de reconocimiento de imágenes, tan importantes en medicina y en la industria automovilística, usan también dichas técnicas. Cuando miras un analizador de frecuencias o la gráfica de un electrocardiograma o el monitor que muestra el pulso de un enfermo, estás *viendo* análisis de Fourier. Las aplicaciones del análisis armónico se han multiplicado debido a los métodos eficaces para el cálculo de la Transformada de Fourier Discreta (el algoritmo conocido como Transformada Rápida de Fourier) y a la potencia de cálculo de los modernos ordenadores.

Desde un punto de vista puramente matemático, no es exagerado afirmar que el análisis de Fourier ha sido el principal motor del desarrollo de las matemáticas en los siglos XIX y XX. Sin ir más lejos, la teoría de conjuntos infinitos de Cantor, la teoría de la medida e integración de Lebesgue y la evolución del concepto de función hasta llegar a la teoría de distribuciones, han estado motivados directamente por problemas surgidos en el análisis armónico.

Estructura de la lección y objetivos

En esta lección vamos a introducir algunos conceptos elementales de la teoría de Series de Fourier y de la Transformada de Fourier Discreta. En este tema *hay matemáticas*, parece innecesario decirlo, pero eludiremos los detalles técnicos y nos centraremos en los aspectos de cálculo y en las aplicaciones. El mundo del tratamiento de la señal es muy amplio: óptica, fotografía, vídeo, telefonía, música, radio, televisión... y el tratamiento de la señal requiere potentes técnicas de cálculo que no podrían llevarse a cabo sin el concurso del ordenador. Por ello creo que este tema tiene interés para todos los profesionales de la informática. Quién sabe si alguna vez tendrás la oportunidad de trabajar en estos temas tan apasionantes. Aquí vas a aprender la terminología y los conceptos más básicos lo que te permitirá, si alguna vez lo necesitas o te interesas en ello, que puedas continuar con provecho profundizando en su estudio.

Conviene que repases las fórmulas de Euler para la exponencial compleja que vimos en la lección primera. También te vendrá bien repasar la técnica de integración por partes y el cálculo de primitivas de productos de senos y cosenos.

Haremos dos prácticas relacionadas con esta lección en las que nos ocuparemos de la aproximación por polinomios trigonométricos y del tratamiento de sonidos e imágenes con la ayuda de la Transformada de Fourier Discreta.

2.2. Conceptos básicos de la teoría de Series de Fourier

Esencialmente la teoría de Series de Fourier persigue dos propósitos:

- El Análisis o descomposición de una señal como suma o superposición (en general infinita) de sinusoides.
- La síntesis o recomposición de una señal a partir de sus sinusoides.

Habrás notado que estoy empleando la palabra “señal” como sinónimo de “función” y así lo seguiré haciendo a lo largo de esta lección con las precisiones que considere necesarias. En análisis armónico las señales más simples son las sinusoides a las que nos hemos referido ya varias veces. Conviene darles un repaso.

Sinusoides

Una sinusoide es una señal de la forma

$$A\,\mathrm{sen}(2\pi\nu t + \phi).$$

El número $A > 0$ es la *amplitud*, $\nu > 0$ es la *frecuencia* medida en ciclos por segundo o Hercios (Hz), $-\pi < \phi \leqslant \pi$ es la *fase* (fase inicial), $2\pi\nu$ es la frecuencia medida en radianes por segundo (que se llama a veces frecuencia angular). El *período* es el tiempo que necesita la sinusoide para completar un ciclo completo, es decir, el período es $T = 1/\nu$ segundos.

$$A\,\mathrm{sen}(2\pi\nu(t+1/\nu)+\phi) = A\,\mathrm{sen}(2\pi\nu t + 2\pi + \phi) = A\,\mathrm{sen}(2\pi\nu t + \phi).$$

En general, una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se dice que es *periódica* con *período* T si $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En tal caso cualquier múltiplo entero de T es también un período de f, esto es, $f(t+kT) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$. Cuando se dice que una función es periódica de período T se sobreentiende que T es el número positivo más pequeño que verifica la igualdad $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

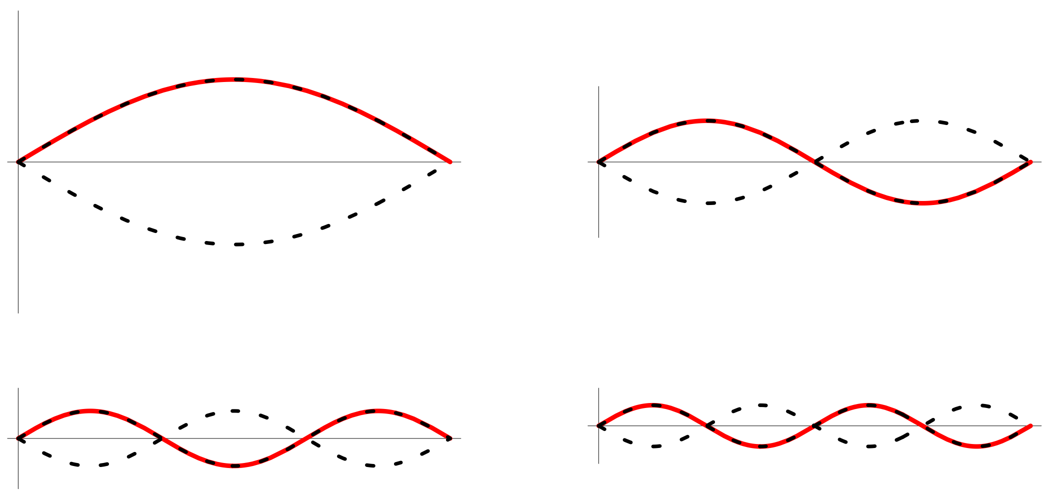
En la representación gráfica de la señal $f(t) = A\,\mathrm{sen}(2\pi\nu t + \phi)$ se interpreta $f(t)$ como la amplitud de la señal en el instante t. La amplitud A representa la máxima altura que alcanza dicha gráfica, esto es, el máximo absoluto de la función f (el mínimo absoluto es $-A$). La frecuencia es el número de veces (ciclos) que se repite la gráfica en un segundo. El período es el tiempo necesario para que la gráfica complete un solo ciclo.

Frecuencia principal y armónicos

Observa que cuanto mayor es la frecuencia más rápidamente oscila la señal. En lo que sigue puedes suponer que las señales representan sonidos. El rango de frecuencias audibles por el oído humano está entre 20 Hz y `22.000` Hz. Las frecuencias fundamentales de las 88 notas de un piano varían desde `27.5` Hz a 4096 Hz. El tono de un sonido depende de la frecuencia. Los sonidos graves se corresponde con bajas frecuencias y los agudos con frecuencias altas. La intensidad del sonido se mide en decibelios (db) y es proporcional a la amplitud de la señal. El timbre o calidad de un sonido (lo que distingue una misma nota en diferentes instrumentos) depende de los armónicos que acompañan al armónico principal (después explicaremos esto de los armónicos).

Las ondas sinusoidales tienen la particularidad de producir un sonido puro, es decir, un sonido que consta de una única frecuencia. Los sonidos que producen los instrumentos musicales son mucho más ricos porque en ellos se superponen sonidos de distintas frecuencias: los armónicos. Los armónicos son sonidos cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Si la frecuencia fundamental es 260 Hz, los armónicos tendrán frecuencias 520 Hz, 780 Hz, 1040 Hz etcétera.

Normalmente no escuchamos los armónicos como tonos separados debido, en parte, a que las amplitudes de los armónicos van decreciendo conforme aumenta la frecuencia. Pero son ellos los que proporcionan a los sonidos musicales y a la voz humana su profundidad y riqueza. ¿Cómo se producen los armónicos? Considera una cuerda de guitarra. Ella pueda vibrar en un movimiento simple hacia arriba y hacia abajo. Pero también puede vibrar de formas más complejas. Por ejemplo, la mitad de la cuerda vibra hacia un lado y la otra media hacia el otro (un nodo en el centro). O la tercera parte de la cuerda pueda vibrar en sentido contrario a las otras partes adyacentes (dos nodos centrales). Y así podríamos continuar. Cada modo de vibración produce una sinusoide con su propia frecuencia y amplitud. La frecuencia correspondiente a la vibración básica hacia arriba y hacia abajo es la frecuencia fundamental. La frecuencia de la sinusoide producida por la segunda forma de vibración es dos veces la frecuencia fundamental (el sonido que produce es una octava más alta que el anterior). La frecuencia que corresponde a la tercera forma de vibración es tres veces la frecuencia fundamental, etcétera.



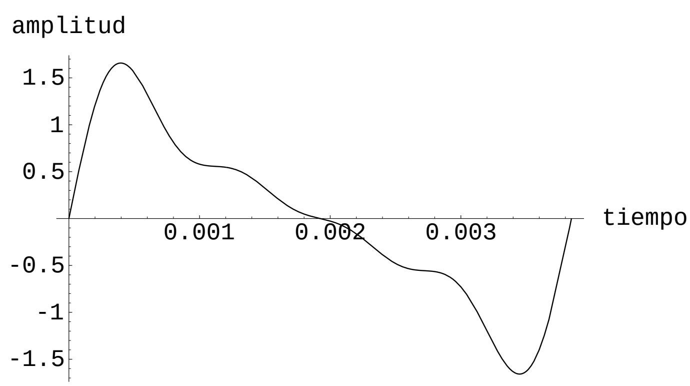
Naturalmente, cuando una cuerda de guitarra vibra se producen todas las vibraciones consideradas simultáneamente y muchas otras más. Cada una de las sinusoides de frecuencia múltiplo entero de la fundamental se llama un armónico. En las vibraciones que se producen de forma natural hay armónicos para cada múltiplo de la frecuencia fundamental, en teoría puede haber infinitos aunque su amplitud decrece conforme aumenta la frecuencia. Prueba el siguiente experimento. Pulsa una cuerda de guitarra y cuando empiece a vibrar tócala ligeramente justo en su punto medio. Observa cómo cambia el sonido que produce: lo que estás oyendo ahora es el segundo armónico. Observa que tú no has pulsado la cuerda de guitarra una segunda vez: estos sonidos estaban allí. Al tocar suavemente la cuerda en su punto medio estás eliminando todos los armónicos cuyas frecuencias son múltiplo impar de la principal (incluida dicha frecuencia).

Representación en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia

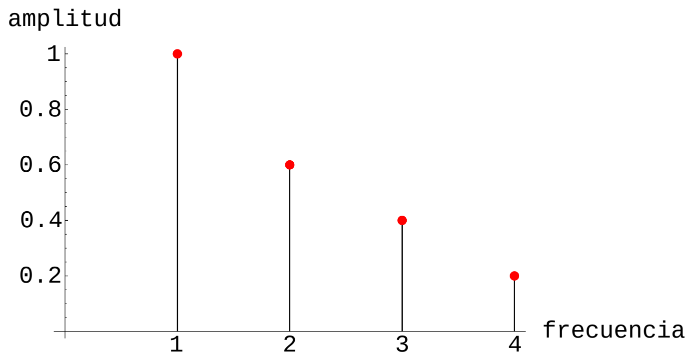
Los sonidos puros pueden representarse gráficamente por una sinusoide con amplitud y frecuencia apropiadas. En esta representación el eje de abscisas se interpreta como el tiempo y en el eje de ordenadas se representa la amplitud. Esto es lo que se conoce como la representación en el dominio del tiempo. Pero la mayoría de los sonidos son complejos y están formados por una superposición de armónicos cada uno con su propia frecuencia y amplitud. Para tales sonidos una representación en el dominio del tiempo no nos proporciona información de sus componentes. Una forma mejor de visualizar la estructura de un sonido complejo consiste en representar las frecuencias en el eje de abscisas y las amplitudes de cada frecuencia en el eje de ordenadas. De esta forma lo que obtenemos es un diagrama de barras; sobre cada frecuencia múltiplo de la principal levantamos un segmento cuya altura representa su amplitud: esta es la representación en el dominio de la frecuencia y el gráfico correspondiente se suele llamar el espectro de amplitudes de la señal. Una señal sinusoidal pura tiene el espectro de amplitudes más sencillo posible: consta de un solo segmento vertical pues dicha señal tiene toda su energía concentrada en una sola frecuencia. Otro espectro sencillo es el de un ruido. Un ruido es un sonido en el que se superponen todas las frecuencias con iguales amplitudes, el espectro correspondiente sería una recta horizontal.

Aquí tienes una representación en el dominio del tiempo de la señal

$$f(t) = \operatorname{sen}(260 \times 2\pi t) + .6 \operatorname{sen}(2 \times 260 \times 2\pi t) + .4 \operatorname{sen}(3 \times 260 \times 2\pi t) + .2 \operatorname{sen}(4 \times 260 \times 2\pi t)$$



Aquí tienes la representación de la misma señal en el dominio de la frecuencia (la unidad en el eje de frecuencias representa 260 Hz).



Polinomios trigonométricos y coeficientes de Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) escribió en 1807 un trabajo sobre la propagación del calor en el que se afirmaba que cualquier señal continua con período $1/\nu$ podía representarse como suma de ondas sinusoidales en la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(2n\pi\nu t + \phi_n)$$

Para empezar nuestro estudio consideremos no una serie sino una suma finita y, por comodidad, *supondremos que el período de nuestra señal es* 1. Tenemos, pues, una suma de la forma:

$$\sum_{n=0}^{N} A_n \operatorname{sen}(2n\pi t + \phi_n) \tag{2.1}$$

Es frecuente llamar a las sinusoides individuales de una suma de este tipo *armónicos*. Esta forma de una suma trigonométrica de armónicos tiene la ventaja de mostrar explícitamente la amplitud y la fase de cada uno de ellos pero es muy incómoda para los cálculos. Por ello es más frecuente escribir esta suma en la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(2\pi n t) + b_n \operatorname{sen}(2\pi n t)) \tag{2.2}$$

la razón de escribir el término constante en la forma $a_0/2$ es para simplificar las fórmulas de los coeficientes que veremos pronto.

Se trabaja con mucha más comodidad con estas sumas si usamos la exponencial compleja. Usando las ecuaciones de Euler tenemos que:

$$\cos(2\pi nt) = \frac{e^{2\pi int} + e^{-2\pi int}}{2}, \qquad \operatorname{sen}(2\pi nt) = \frac{e^{2\pi int} - e^{-2\pi int}}{2i}$$

con ello la suma 2.2 puede ser escrita como:

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi int} \tag{2.3}$$

La relación entre estas tres formas distintas de escribir una misma suma trigonométrica viene dada por las siguientes igualdades válidas para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n = \frac{a_n - i b_n}{2} \qquad c_{-n} = \frac{a_n + i b_n}{2} \tag{2.4}$$

$$a_n = A_n \operatorname{sen}\phi_n \qquad b_n = A_n \cos\phi_n \tag{2.5}$$

Una suma como la que estamos considerando se llama un *polinomio trigonométrico* de orden n.

Supongamos que tenemos una señal f que podemos representar como un polinomio trigonométrico:

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi int}$$

Observa que para que esto sea posible la señal f tiene que ser *muy buena* pues, por ejemplo, tiene que ser indefinidamente derivable y tener período 1. Pero ahora lo que estamos suponiendo es que la función f es conocida y que se verifica la igualdad anterior y nuestro problema es calcular los coeficientes c_n. Para ello multiplicamos dicha igualdad por $e^{-2\pi ikt}$ y obtenemos que:

$$e^{-2\pi ikt} f(t) = c_k + \sum_{n=-N, n\neq k}^{N} c_n e^{2\pi i(n-k)t}$$

Ahora integramos ambos lados entre 0 y 1 y tenemos en cuenta que si $q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$ entonces:

$$\int_0^1 e^{2\pi iqt}\, dt = \frac{1}{2\pi iq}\left[e^{2\pi iqt}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2\pi iq}(e^{2\pi iq} - e^0) = \frac{1}{2\pi iq}(1-1) = 0$$

Resulta así que:

$$c_k = \int_0^1 e^{-2\pi ikt} f(t)\, dt$$

Es interesante observar que, debido a que f se supone con período 1, el cálculo de la integral anterior puede hacerse en cualquier intervalo de longitud 1. En efecto, si $x \in \mathbb{R}$ tenemos que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{x+1} \mathrm{e}^{-2\pi i k t} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-2\pi i k(x+1)} f(x+1) - \mathrm{e}^{-2\pi i k x} f(x) = \mathrm{e}^{-2\pi i k x} f(x) - \mathrm{e}^{-2\pi i k x} f(x) = 0$$

Lo que prueba que la función $\int_x^{x+1} \mathrm{e}^{-2\pi i k t} f(t)\,\mathrm{d}t$ es constante y, por tanto, igual a $\int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i k t} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si ahora suponemos que f tiene período T podemos considerar la función $g(t) = f(tT)$ que tiene período 1. Supuesto que

$$g(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{2\pi i n t}$$

se deduce enseguida que:

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{2\pi i n t/T}$$

donde los coeficientes vienen dados por:

$$c_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i n s} g(s)\,\mathrm{d}s = [s = t/T] = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-2\pi i n t/T} g(t/T)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-2\pi i n t/T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Las consideraciones anteriores motivan a las siguientes definiciones.

Definición 2.1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una señal de periodo T integrable en $[0, T]$. Se definen los *coeficientes de Fourier complejos* de f por:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-2\pi i n t/T} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{2.6}$$

El polinomio trigonométrico:

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{2\pi i n t/T} \tag{2.7}$$

donde los coeficientes c_n vienen dados por 2.6, se llama *polinomio de Fourier de orden* n de f. La sucesión de los polinomios de Fourier de f se llama *serie de Fourier* de f. Cuando dicha serie converge escribimos:

$$\lim_{N\to\infty} S_N(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{2\pi i n t/T}$$

Teniendo en cuenta 2.4 se deduce que las igualdades 2.6 y 2.7 pueden escribirse de forma equivalente:

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(2\pi nt/T) + b_n \operatorname{sen}(2\pi nt/T)\right) \tag{2.8}$$

donde:

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\mathrm{e}^{-2\pi int/T} + \mathrm{e}^{2\pi int/T}\right) f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T \cos(2\pi nt/T) f(t)\,\mathrm{d}t \quad n = 0,1,2,\dots \tag{2.9}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{T}\int_0^T i\left(\mathrm{e}^{-2\pi int/T} - \mathrm{e}^{2\pi int/T}\right) f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T \operatorname{sen}(2\pi nt/T) f(t)\,\mathrm{d}t \quad n = 1,2,\dots \tag{2.10}$$

son los *coeficientes de Fourier reales* de f. Los a_n se llaman *coeficientes coseno* y los b_n *coeficientes seno* de f.

Es frecuente que $T = 2\pi$ y que se elija como intervalo de integración $[-\pi,\pi]$ con lo cual se tiene:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-int} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{2.11}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t)\,\mathrm{d}t \quad n = 0,1,2,\dots \tag{2.12}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nt) f(t)\,\mathrm{d}t \quad n = 1,2,\dots \tag{2.13}$$

Observaciones

- Para calcular los coeficientes de Fourier de una señal de periodo T podemos integrar en cualquier intervalo de longitud T. Suele ser frecuente, por razones de simetría, elegir el intervalo $[-T/2, T/2]$.
- Observa que nada hemos dicho aún sobre la relación entre una función f y su serie de Fourier. La pregunta ¿de qué modo la serie de Fourier de f representa a f? no tiene una respuesta fácil porque tiene muchas respuestas. Mas adelante presentaremos algunos resultados en este sentido.

- Observa que si cambias una función en un número finito de puntos esto no afecta para nada a sus coeficientes de Fourier los cuales viene dados por medio de integrales.
- A diferencia de la serie de Taylor de una función, la cual solamente está definida si dicha función es indefinidamente derivable, la única condición para que la serie de Fourier de una función esté definida es que la función sea integrable en un intervalo. Te recuerdo que hay funciones integrables con infinitas discontinuidades. Es decir, el concepto de serie de Fourier es mucho menos restrictivo que el de serie de Taylor y esa es una de las grandes ventajas de la teoría de series de Fourier: puede aplicarse a funciones muy generales.
- En contra de lo que pudiera parecer a primera vista, la hipótesis de periodicidad no es restrictiva para la aplicación de la teoría de series de Fourier. En efecto, si estamos interesados en representar por medio de una serie de Fourier una función f definida e integrable en un intervalo $[a,b]$ podemos *extender* dicha función a todo $\mathbb{R}$ de manera que la extensión sea una función periódica de período $T = b-a$. Para ello basta repetir la gráfica de f en intervalos de longitud T (si $f(b) = f(a+T) \neq f(a)$ será preciso cambiar el valor de f en uno de los extremos del intervalo $[a,b]$).
- Observa que las fórmulas que dan los coeficientes de Fourier de una función f tienen perfecto sentido para funciones complejas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. La consideración de funciones complejas, si bien desde un punto de vista teórico no presenta ninguna dificultad e incluso hace que la teoría sea más elegante y fácil de desarrollar, desde un punto de vista práctico no añade nada pues en las aplicaciones siempre se consideran señales reales.

2.2.1. Series de Fourier seno y coseno

Supongamos que f es una función definida e integrable en $[-\pi,\pi]$.

- Si f es par, esto es $f(-t) = f(t)$, entonces de la definición 2.13 de los coeficientes seno de f se deduce que $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

- Si f es impar, esto es $F(-t) - f(t)$, entonces tenemos que $a_n = 0$ para todo $n = 0,1,2,\dots,$ y

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}(nt)\,\mathrm{d}t$$

Este resultado lleva a definir las series de Fourier seno y coseno.

Sea ahora f una función definida e integrable en el intervalo $[0,\pi]$. Podemos *extender* f al intervalo $[-\pi,\pi]$ de dos formas distintas:

$$f_1(x) = \begin{cases} -f(-x), & -\pi \leqslant x < 0 \\ f(x), & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

y

$$f_2(x) = \begin{cases} f(-x), & -\pi \leqslant x < 0 \\ f(x), & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

Es claro que f_1 es impar y f_2 es par y coinciden con f en $[0,\pi]$. La función f_1 es llamada la *extensión impar* de f y f_2 es llamada la *extensión par* de f.

- La serie de Fourier de f_1 se llama la *serie de Fourier seno* de f y viene dada por:

$$\sum_{n\geqslant 1} b_n \operatorname{sen}(nt), \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\operatorname{sen}(nt)\,\mathrm{d}t$$

- La serie de Fourier de f_2 se llama la *serie de Fourier coseno* de f y viene dada por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n \cos(nt), \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

2.2.2. Convergencia de las series de Fourier

El siguiente resultado nos dice que en condiciones razonablemente generales la serie de Fourier de una función converge puntualmente a dicha función.

Teorema 2.2. *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una señal periódica con período T e integrable en* $[0,T]$.

1. *En todo punto t donde f sea derivable por la izquierda y por la derecha se verifica que:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \,\mathrm{e}^{2\pi i n t/T} = f(t)$$

2. *En todo intervalo $[a,b]$ donde f sea derivable con derivada acotada se verifica que:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \,\mathrm{e}^{2\pi i n t/T} = f(t) \quad \forall t\in[a,b]$$

y además la convergencia es uniforme en $[a,b]$.

3. *Si f no es continua en un punto t pero la derivada de f tiene límites por la izquierda y por la derecha en t entonces se verifica que:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{2\pi i n t/T} = \frac{f(t+)+f(t-)}{2}$$

donde $f(t+)$ y $f(t-)$ son, respectivamente, los límites por la derecha y por la izquierda de f en t.

2.2.3. Ejercicios

1. *a*) Sea $f(t) = \operatorname{sen}(2\pi nt) + \operatorname{sen}(2\pi mt)$ donde m, n son enteros positivos. ¿Es f periódica? En caso afirmativo, ¿cuál es su período?

   b) Sea $f(t) = \operatorname{sen}(2\pi nrt) + \operatorname{sen}(2\pi st)$ donde r, s son números racionales positivos de la forma $r = m/n$, $s = p/q$ (fracciones irreducibles). ¿Es f periódica? En caso afirmativo, ¿cuál es su período?

   c) Justifica que la función $f(t) = \cos t + \cos\sqrt{2}\,t$ no es periódica.

2. Supongamos que f es una función definida en $\mathbb{R}$ y sea $T > 0$. Sin plantearnos ninguna cuestión de convergencia pongamos

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT)$$

   a) Prueba que g es periódica de período T (g se llama la "periodización" de f).

   b) Sea

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1 - 2|t| & |t| \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 0, & |t| > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

   Representa la "periodización" de $\Gamma(t)$ para $T = 1/2$, $T = 3/4$, $T = 1$, $T = 2$.

   c) ¿Qué ocurre con la "periodización" de una función periódica?

3. Considera las distintas formas de escribir la series de Fourier de una función periódica de período 1:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nt) + b_n \operatorname{sen}(2\pi nt)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{2\pi i n t}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(2\pi nt + \phi_n)$$

Indica con detalle cómo se pasa de una a otra, es decir, las relaciones que hay entre los distintos coeficientes.

4. Calcula las series de Fourier de las siguientes funciones:

   a)
   $$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

   b) $f(x) = x$, para $-\pi < x \leqslant \pi$.

   c)
   $$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

   d) $f(x) = x^2$, para $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Deduce el valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

5. Calcula la serie de Fourier coseno de la función $f(x) = x$ para $x \in [0, \pi]$.

6. Calcula la serie de Fourier seno de la función $f(x) = 1$ para $x \in [0, \pi]$.

7. Calcula la serie de Fourier seno de la función $f(x) = \cos x$ para $x \in [0, \pi]$.

8. Calcula la serie de Fourier de la función 2π periódica que aparece en la figura.

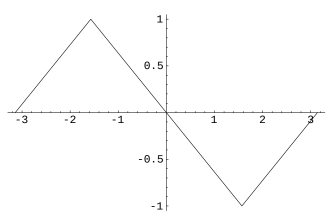


Figura 2.1: Función *“diente de sierra”*

2.3. Geometría de las series de Fourier

La teoría de las series de Fourier está estrechamente relacionada con los aspectos algebraicos y geométricos de los espacios euclídeos. Lo característico de la geometría euclídea es el concepto de ortogonalidad o perpendicularidad y sus consecuencias. Te recuerdo que si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \mathbf{y_3})$ son vectores de $\mathbb{R}^3$, su *producto escalar*, que notaremos por $(\mathbf{x} \mid \mathbf{y})$, se define como:

$$(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Se dice que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son ortogonales si $(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = 0$ y se escribe $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Te recuerdo también que la *norma euclídea* de un vector $\mathbf{x}$ viene dada por

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})}$$

Observa que:

$$\sum_{j=1}^{3}(x_j^2 + y_j^2) = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

y

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \sum_{j=1}^{3}(x_j + y_j)^2 = \sum_{j=1}^{3}(x_j^2 + y_j^2) + 2\sum_{j=1}^{3} x_j y_j$$

Deducimos de estas dos igualdades que:

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{3} x_j y_j = 0 \Longleftrightarrow \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

que no es otra cosa que el *teorema de Pitágoras.*

Observa que si $\|\mathbf{y}\| = 1$, los vectores $\mathbf{x} - (\mathbf{x} \mid \mathbf{y})\mathbf{y}$ e $\mathbf{y}$ son ortogonales. Por esta razón se dice que el vector $(\mathbf{x} \mid \mathbf{y})\mathbf{y}$ es la *proyección ortogonal* de $\mathbf{x}$ sobre $\mathbf{y}$. Una interpretación muy sugerente del producto escalar es la siguiente: *el producto escalar de dos vectores nos dice lo que cada uno de ellos conoce del otro.*

En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ las *bases ortonormales* son muy útiles porque en ellas es muy fácil representar un vector. Te recuerdo que una base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$, se llama ortonormal si $\mathbf{u_i} \perp \mathbf{u_j}$ para $i \neq j$ y $\|\mathbf{u_i}\| = 1$ donde $1 \leqslant i, j \leqslant 3$. Dado un vector $\mathbf{a}$ sus componentes en una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ son los números $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que verifican la igualdad:

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{u_1} + \alpha_2 \mathbf{u_2} + \alpha_3 \mathbf{u_3} \tag{2.14}$$

Esta igualdad vectorial es un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas que deberemos resolver para calcular las α_i. Pero si la base $\mathcal{B}$ es una base ortonormal entonces podemos calcular directamente las α_i pues basta para ello multiplicar escalarmente la igualdad 2.14 por $\mathbf{u_1}$ para obtener que:

$$(\mathbf{u_1} \mid \mathbf{a}) = \alpha_1(\mathbf{u_1} \mid \mathbf{u_1}) + \alpha_2(\mathbf{u_1} \mid \mathbf{u_2}) + \alpha_3(\mathbf{u_1} \mid \mathbf{u_2}) = \alpha_1$$

Análogamente se obtiene que $\alpha_2 = (\mathbf{u_2} \mid \mathbf{a})$ y $\alpha_3 = (\mathbf{u_3} \mid \mathbf{a})$. Con ello la expresión del vector $\mathbf{a}$ en la base ortonormal $\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ es:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{u_1} \mid \mathbf{a})\mathbf{u_1} + (\mathbf{u_2} \mid \mathbf{a})\mathbf{u_2} + (\mathbf{u_3} \mid \mathbf{a})\mathbf{u_3}$$

Fíjate que $(\mathbf{u_i} \mid \mathbf{a})\mathbf{u_i}$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{u_i}$ por lo que la igualdad anterior nos dice que la expresión de un vector en una base ortonormal se obtiene sumando las proyecciones ortogonales de dicho vector sobre los vectores de la base.

Todo esto son conceptos algebraicos y geométricos. Pero en $\mathbb{R}^3$ también hay una estructura analítica. Recuerda que la *distancia euclídea* entre dos vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ viene dada por:

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$$

Pues bien, la estructura analítica a la que me refería antes es la siguiente: con la distancia euclídea $\mathbb{R}^3$ es un espacio métrico completo.

La generalización de lo antes dicho de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^n$ ya $\mathbb{C}^n$ es inmediata. Nos proponemos generalizar todo esto a espacios de funciones y relacionarlo con las series de Fourier. En esta generalización es fácil entender los aspectos algebraicos y geométricos pero el aspecto analítico requiere el uso de la integral de Lebesgue por lo que no entraremos en él.

Lo primero que es fácil de generalizar es el concepto de ortogonalidad. Supongamos que f y g son funciones reales integrables en un intervalo $[a,b]$. Podemos considerar n puntos de dicho intervalo igualmente espaciados una distancia h y evaluar en ellos dichas funciones para obtener dos vectores $(u_1,u_2,\dots,u_n)$, $(v_1,v_2,\dots,v_n)$. La suma $h\sum_{j=1}^n u_i v_i$ es una suma de Riemann de la integral $\int_a^b fg$ y el hecho de que los vectores $(u_1,u_2,\dots,u_n)$, $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ sean ortogonales se traduce en que $\sum_{j=1}^n u_i v_i = 0$, es decir, en que dicha suma sea igual a cero. De esta forma llegamos a la siguiente definición.

Definición 2.3. Dos funciones reales f y g son ortogonales en un intervalo $[a,b]$ si

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Cuando las funciones toman valores complejos la definición anterior requiere una modificación.

Definición 2.4. Dos funciones (reales o complejas) f y g son ortogonales en un intervalo $[a,b]$ si

$$\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = 0$$

La definición anterior nos lleva a definir un producto escalar de la forma:

$$(f \mid g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t \tag{2.15}$$

y una norma por:

$$\|f\| = \sqrt{(f \mid \overline{f})} = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t} \tag{2.16}$$

Aquí hay un detalle técnico y es que para que la definición 2.16 tenga sentido debe verificarse que la función $|f|^2$ sea integrable en $[a,b]$, es decir,

$$\int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty$$

se dice entonces que f *es una función de cuadrado integrable en* $[a,b]$. Esta condición es *más restrictiva* que exigir que f sea integrable en $[a,b]$. Es decir, si f es de cuadrado integrable en $[a,b]$ también f es integrable en $[a,b]$ pero el recíproco no tiene por qué verificarse como puedes comprobar con $f(t) = 1/\sqrt{t}$ que es integrable en $[0,1]$ pero $|f(t)|^2 = 1/t$ no es integrable en $[0,1]$.

Afortunadamente esta exigencia es compatible con la definición 2.15 pues si f,g son funciones de cuadrado integrable en $[a,b]$ entonces la función producto $f\overline{g}$ es integrable en $[a,b]$.

También hay otro detalle menor y es que para conseguir que la función constante 1 tenga norma igual a 1 debemos modificar la definición 2.15. Introducimos a continuación la terminología adecuada y damos las definiciones precisas.

Definición 2.5. Representaremos por $L^2(0,T)$ el espacio de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que son T periódicas y de cuadrado integrable en $[0,T]$. Este conjunto con las operaciones usuales de suma de funciones y producto por escalares complejos es un espacio vectorial complejo.

Para todo par de funciones $f,g \in L^2(0,T)$ definimos su producto escalar por:

$$(f \mid g) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\overline{g(t)} \, \mathrm{d}t \tag{2.17}$$

y definimos la norma de $f \in L^2(0,T)$ por:

$$(f \mid g) = \sqrt{(f \mid f)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t} \tag{2.18}$$

Observaciones

- Las propiedades del producto escalar definido por la igualdad 2.17 son las usuales. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $f,g,h \in L^2(0,T)$ se verifica:

1. $$(\alpha f + \beta g \mid h) = \alpha(f \mid h) + \beta(g \mid h)$$

   Lo que se expresa diciendo que el producto escalar es lineal en la primera variable.
2. $(f \mid g) = \overline{(g \mid f)}$

   De las dos propiedades anteriores se deduce que

   $$(f \mid \alpha g + \beta h) = \overline{\alpha}(f \mid g) + \overline{\beta}(f \mid h)$$

   lo que se expresa diciendo que el producto escalar es conjugado–lineal en la segunda variable.
3. $(f \mid f) \geqslant 0$.

- La norma definida por la igualdad 2.18 tiene las propiedades usuales de las normas:
  - $\|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\|$.
  - $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$
- Las propiedades $(f \mid f) = 0 \Longrightarrow f = 0$ o, lo que es igual, $\|f\| = 0 \Longrightarrow f = 0$ son también ciertas pero hay que precisar lo que se entiende por $f = 0$. A efectos prácticos puedes interpretar la igualdad $f = 0$ en el sentido de que a efectos de integración la función f se comporta igual que la función nula.
- La consideración del intervalo $[0,T]$ en lo anterior es por conveniencia. Puesto que las funciones con las que trabajamos son T-periódicas podemos considerar en las definiciones anteriores cualquier intervalo de longitud T. Por razones de simetría es frecuente considerar el intervalo $[-T/2, T/2]$.

Definición 2.6. Dos funciones $f,g \in L^2(0,T)$ se llaman ortogonales si $(f \mid g) = 0$ en cuyo caso escribimos $f \perp g$. Un conjunto de funciones $\mathcal{B} \subset L^2(0,T)$ se dice ortogonal si para cada par de elementos distintos $f,g \in \mathcal{B}$ se tiene que $f \perp g$. Si, además para toda función $f \in \mathcal{B}$ es $\|f\| = 1$ se dice que $\mathcal{B}$ es un conjunto ortonormal de funciones.

Es inmediato que un conjunto de funciones ortogonales es linealmente independiente.

Ejemplo 2.7. En el espacio $L^2(-\pi,\pi)$ con el producto escalar:

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t \qquad \forall f,g \in L^2(-\pi,\pi)$$

un ejemplo de conjunto ortonormal de funciones especialmente importante es el formado por las exponenciales complejas:

$$\mathcal{E} = \left\{ e^{int} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Otro ejemplo de conjunto ortogonal es el formado por las funciones trigonométricas:

$$\mathcal{T} = \{1, \cos(nt), \operatorname{sen}(nt) : n \in \mathbb{N}\}$$

De hecho, tenemos las siguientes igualdades:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\operatorname{sen}(mt)\,dt = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nt)\cos(mt)\,dt = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

♦

Las siguientes igualdades son de comprobación inmediata:

$$\|\varphi + \psi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\operatorname{Re}(\varphi \mid \overline{\psi}) \quad \forall \varphi, \psi \in L^2(0,T) \tag{2.19}$$

Si $\{e_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ es un conjunto de n funciones ortonormales en $L^2(0,T)$ y $\lambda_k \in \mathbb{C}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ entonces:

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 \tag{2.20}$$

Proposición 2.8. *Supongamos que $\mathcal{B} = \{e_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ es un conjunto de n funciones ortonormales en $L^2(0,T)$ y sea $\mathcal{M}$ el subespacio vectorial engendrado por $\mathcal{B}$. Dada una función $f \in Ł^2(0,T)$ la función:*

$$P_{\mathcal{M}}(f) = \sum_{j=1}^{n} (f \mid e_j) e_j$$

se llama la ***proyección ortogonal*** *de f sobre $\mathcal{M}$ y tiene las propiedades siguientes:*

1. *$P_{\mathcal{M}}(f) \in \mathcal{M}$.*
2. *$f - P_{\mathcal{M}}(f)$ es ortogonal a $\mathcal{M}$.*

3. $\min\{\|f-g\| : g\in\mathcal{M}\} = \|f-P_{\mathcal{M}}(f)\|$

Demostración La primera afirmación es evidente porque por su definición $P_{\mathcal{M}}(f)$ es combinación lineal de los vectores e_k que forman una base de $\mathcal{M}$.

Para probar la segunda afirmación basta observar que:

$$(f-P_{\mathcal{M}}(f)\mid e_k) = (f\mid e_k) - \sum_{j=1}^{n}(f\mid e_j)(e_j\mid e_k) = (f\mid e_k) - (f\mid e_k) = 0$$

lo que prueba que $f-P_{\mathcal{M}}(f)$ es ortogonal a los vectores e_k y, por tanto, también es ortogonal a cualquier combinación lineal de ellos, es decir, a cualquier vector de $\mathcal{M}$.

Para probar el punto 3 tenemos que para toda $g=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j\in\mathcal{M}$ se verifica:

$$\begin{aligned}
\|f-g\|^2 &= \|(f-P_{\mathcal{M}}(f)) + (P_{\mathcal{M}}(f)-g)\|^2 = \\
&\big(\text{por 2.19 con } \varphi = f-P_{\mathcal{M}}(f),\ \psi = P_{\mathcal{M}}(f)-g\big)\\
&= \|f-P_{\mathcal{M}}(f)\|^2 + \|P_{\mathcal{M}}(f)-g\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f-P_{\mathcal{M}}(f)\mid \overline{P_{\mathcal{M}}(f)-g}) = \\
&\big(\text{por ser } P_{\mathcal{M}}(f)-g\in\mathcal{M} \text{ se verifica que } (f-P_{\mathcal{M}}(f))\perp(P_{\mathcal{M}}(f)-g)\big)\\
&= \|f-P_{\mathcal{M}}(f)\|^2 + \left\|P_{\mathcal{M}}(f)-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j\right\|^2 = \\
&\big(\text{por 2.20 con } \lambda_j = (f\mid e_j)-\alpha_j\big)\\
&= \|f-P_{\mathcal{M}}(f)\|^2 + \sum_{j=1}^{n}\left|(f\mid e_j)-\alpha_j\right|^2
\end{aligned}$$

Deducimos que para $g\in\mathcal{M}$ la cantidad $\|f-g\|$ es mínima cuando $(f\mid e_j)-\alpha_j = 0$, es decir, $\alpha_j = (f\mid e_j)$, esto es, $g = P_{\mathcal{M}}(f)$. ☑

Particularicemos el resultado anterior al espacio $L^2(-\pi,\pi)$.

Proposición 2.9. *Sea $f\in L^2(-\pi,\pi)$, y sea $\mathcal{M}$ el espacio vectorial engendrado por las funciones $\mathcal{B} = \left\{e^{ik,t} : -N\leqslant k\leqslant N\right\}$. La proyección ortogonal de f sobre $\mathcal{M}$ es el polinomio de Fourier de f de orden N:*

$$S_N(t) = P_{\mathcal{M}}(f)(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$$

dicho polinomio es además el polinomio trigonométrico de orden N que proporciona la aproximación óptima a f en la norma de $L^2(-\pi,\pi)$:

$$\min\{\|f-g\| : g\in\mathcal{M}\} = \|f-S_N\|$$

Demostración Pongamos e_k para representar la función e^{ikt}. Basta observar que el conjunto de funciones $\mathcal{B} = \{e_k : -N \leqslant k \leqslant N\}$ es ortonormal en $L^2(-\pi,\pi)$ y que:

$$P_{\mathcal{M}}(f) = \sum_{k=-N}^{N} (f \mid e_k)e_k == \sum_{k=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-ikt}\,\mathrm{d}t \right) e_k = (\text{por } 2.11) = S_N$$

$\boxed{\checkmark}$

Hasta aquí hemos visto los aspectos algebraicos y geométricos de los que hablamos antes. Los aspectos analíticos se recogen en el siguiente teorema.

Teorema 2.10. *1. Para toda función $f \in L^2(-\pi,\pi)$ se verifica que su serie de Fourier converge a f en la norma de $L^2(-\pi,\pi)$:*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f(t) - \sum_{k=-N}^{N} c_k\,\mathrm{e}^{ikt} \right\| = 0.$$

2. Igualdad de Parseval:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{2.21}$$

La validez del anterior teorema depende de un hecho analítico profundo: el espacio $L^2(-\pi,\pi)$ es un espacio métrico completo con la distancia dada por

$$d(f,g) = \|f - g\|$$

La convergencia en la norma de $L^2(-\pi,\pi)$ se llama *convergencia en media cuadrática* . Observa que dos funciones pueden estar muy próximas en media cuadrática y, sin embargo, tomar valores muy diferentes pues la media cuadrática mide un área.

La igualdad de Parseval 2.21 tiene una interpretación interesante. El número $|c_n|^2$ se interpreta como la energía del armónico complejo e^{int}, mientras que la integral $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$ se interpreta como la energía de la señal (en este sentido se dice que las funciones de $L^2(-\pi,\pi)$ tienen energía finita). La igualdad de Parseval expresa, pues, que la energía de la señal es igual a la suma de las energías de sus armónicos componentes.

2.3.1. Suavidad de una señal y convergencia de su serie de Fourier

El teorema 2.2 pone de manifiesto una estrecha relación entre las propiedades locales de una función (continuidad, derivabilidad) y las propiedades globales de convergencia de su serie de Fourier. Queremos precisar un poco más esta relación. Observa que la convergencia de una serie de Fourier depende de la rapidez con la que los coeficientes c_n convergen a cero. Un primer resultado a este respecto, consecuencia directa de la igualdad de Parseval y de la condición básica necesaria para la convergencia de una serie, es el siguiente.

Proposición 2.11. *Los coeficientes de Fourier de una función de cuadrado integrable convergen a cero.*

La hipótesis de que una función sea de cuadrado integrable (tenga energía finita) es muy poco exigente, podemos intuir que si exigimos perfecciones mayores a la función obtendremos también más información sobre la forma en que los coeficientes de Fourier convergen a cero. De hecho, se verifica el siguiente resultado que puede probarse integrando por partes.

Proposición 2.12. *Sea f una función periódica y supongamos que f tiene derivadas continuas hasta el orden k. Entones hay un número $M > 0$ tal que*

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{|n|^k} \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{Z}$$

En el caso en que $k = 1$ se verifica que la serie de los coeficientes de Fourier de f converge absolutamente, es decir, $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < +\infty$.

2.3.2. Espectro, dominio del tiempo y dominio de la frecuencia

Una señal analógica dada por medio de una función $f(t)$ se dice que está dada en *el dominio del tiempo*. Supongamos que dicha señal es T-periódica y de cuadrado integrable y que su serie de Fourier es

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, \mathrm{e}^{2\pi i n t/T}$$

(igualdad que, al menos, se verifica en el sentido de la convergencia en media cuadrática). Las frecuencias de los armónicos complejos que forman esta serie son n/T. El *espectro* de f se define como el conjunto de pares $\{(n/T, c_n) : n \in \mathbb{Z}\}$. El conocimiento del espectro de una señal determina a dicha señal (al menos en el sentido de la convergencia en media cuadrática). Podemos considerar una función $\widehat{f}$ definida en el conjunto de las frecuencias $\{n/T : n \in \mathbb{Z}\}$ por $\widehat{f}(n/T) = c_n$. Se suele decir que dicha función representa a la señal f en el *dominio de la frecuencia*. La "gráfica" de la función $\left|\widehat{f}\right|$ se llama el *espectro de amplitudes*, y la "gráfica" de la función $\arg \widehat{f}$ se llama el *espectro de fases*.

Recuerda que si la serie de Fourier la escribimos en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(2n\pi\nu t + \phi_n)$$

donde $A_n \geqslant 0$ es la amplitud del armónico n-ésimo y ϕ_n es su fase, entonces, en virtud de las igualdades 2.4 y 2.5 se verifica que $A_n = 2|c_n|$ y $\phi_n = \arg c_n$ lo que justifica la terminología empleada. Ten en cuenta que para una señal real se verifica siempre que $c_n = \overline{c_{-n}}$ lo que explica el aspecto de las siguientes "gráficas".

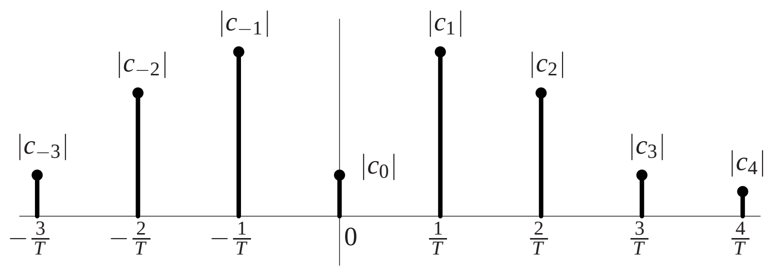


Figura 2.2: Espectro de amplitudes

El espectro de amplitudes consiste en líneas espectrales regularmente espaciadas en las frecuencias n/T. Para $n = 1$ y $n = -1$ las líneas corresponden a la *frecuencia fundamental*. Las demás líneas son llamadas *armónicos* de la señal.

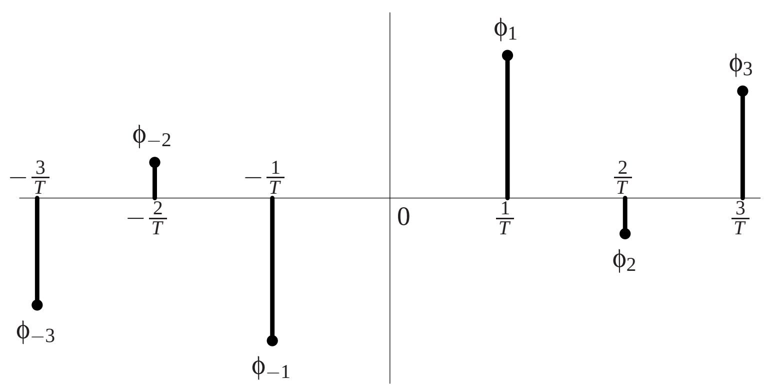


Figura 2.3: Espectro de fases

Lo interesante de estas representaciones es que para manipular una señal analógica es más fácil hacerlo en el dominio de la frecuencia. Por ejemplo, si la señal es un sonido las frecuencias bajas corresponden a los tonos graves y las altas a los agudos, mientras que las amplitudes representan la intensidad del sonido del armónico correspondiente.

2.4. Introducción a la Transformada de Fourier Discreta

Actualmente la mayor parte de las señales están digitalizadas. Para fijar ideas consideremos una señal de sonido. Las variaciones en la presión del aire que constituyen un sonido hacen vibrar la membrana de un micrófono que las transforma en una señal eléctrica cuyo voltaje oscila continuamente y es convertido en una serie de números por un digitalizador. Un digitalizador es algo así como un voltímetro que hace miles de medidas por segundo. Cada medida da lugar a un número que se almacena digitalmente (en formato de 8 bits o 16 bits dependiendo de la perfección con que se quiera reproducir el sonido). Este número se llama una muestra y al proceso de convertir un sonido en una serie de números se le llama muestreo.

La tarjeta de sonido de tu ordenador tiene un digitalizador. Si conectas un micrófono a tu ordenador y grabas tu voz, el archivo que resulta contiene una serie de muestras que permiten reproducir lo que has grabado.

Lo anterior quiere decir que usualmente lo que conocemos de una señal es una muestra, esto es, una señal podemos verla como un vector cuyas componentes son valores de la señal en determinados instantes. Si el tamaño de la muestra es N, este vector está en el espacio vectorial N-dimensional $\mathbb{C}^N$. En términos muy generales puede afirmarse que el análisis de esta señal consiste en representarla en diferentes bases de $\mathbb{C}^N$. Estas bases se eligen de forma que la correspondiente representación pueda ser fácilmente interpretada y proporcione información útil sobre la señal. Un ejemplo de esto es la Transformada de Fourier Discreta que vamos a ver a continuación.

Supongamos que conocemos N muestras de una señal periódica f de período T las cuales se han tomado en instantes t_k igualmente espaciados a lo largo de un período, es decir, $t_k = kT/N$, donde $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Conocemos, pues, los N números[1]:

$$f(kT/N) = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

y sabemos que f tiene período T. Usando esta información *queremos calcular una buena aproximación de los coeficientes de Fourier de f.*

[1] Es usual en este contexto trabajar con índices que empiezan en 0. La gran mayoría de los textos lo hacen así. Esto tiene el pequeño inconveniente de que un vector de datos no tiene una posición 0 lo que, como veremos en las prácticas que haremos sobre este tema con *Mathematica*, obliga a hacer pequeños ajustes en los algoritmos de cálculo.

Como tenemos N datos parece lógico calcular N coeficientes c_n. Un resultado que no hemos comentado antes es que bajo hipótesis muy generales se verifica que $\text{lím}\{c_n\} = 0$, esto es, la sucesión de los coeficientes de Fourier converge a cero. Por ello los coeficientes más significativos vienen al principio. Teniendo esto en cuenta, vamos a tratar de calcular los coeficientes c_n para $n = -N/2, \dots, N/2-1$ (o un intervalo centrado si N es impar). Este cálculo podemos hacerlo de dos formas.

Calculando de forma aproximada el valor de la integral

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi nt/T}\,\mathrm{d}t$$

Para ello podemos proceder como sigue:

$$c_n = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{T}\int_{kT/N}^{(k+1)T/N} f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi nt/T}\,\mathrm{d}t \approx \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{N} f(kT/N)\,\mathrm{e}^{-2i\pi nk/N}$$

lo que nos lleva a tomar como una aproximación de los coeficientes c_n los números

$$c_n' = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k\omega^{-nk} \quad \text{donde } \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/N}, \quad -\frac{N}{2} \leqslant n \leqslant \frac{N}{2} - 1 \tag{2.22}$$

Otra forma de proceder es calcular coeficientes $\widehat{c}_n$ por la condición de que el polinomio trigonométrico

$$P(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \widehat{c}_n\,\mathrm{e}^{2i\pi nt/T}$$

interpole a f en los puntos t_k, es decir, verifique que $P(kN/T) = y_k$ para $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Debemos resolver para ello el siguiente sistema de N ecuaciones lineales con N incógnitas (los $\widehat{c}_n$):

$$\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \widehat{c}_n\omega^{nk} = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \tag{2.23}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\sum_{n=-N/2}^{-1} \widehat{c}_n\omega^{nk} = \sum_{p=N/2}^{N-1} \widehat{c}_{p-N}\omega^{(p-N)k} = \sum_{n=N/2}^{N-1} \widehat{c}_{n-N}\omega^{nk}$$

y definiendo:

$$Y_n = \begin{cases} \widehat{c}_n & 0 \leqslant n \leqslant \dfrac{N}{2} - 1 \\ \widehat{c}_{n-N} & \dfrac{N}{2} \leqslant n \leqslant N-1 \end{cases}$$

el sistema 2.23 puede escribirse en la forma:

$$\sum_{n=0}^{N-1} Y_n \omega^{nk} = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{2.24}$$

Este sistema puede escribirse en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{N-1} \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

Pongamos $\Omega_N = \left(\omega^{nk}\right)_{\substack{0 \leqslant k \leqslant N-1 \\ 0 \leqslant n \leqslant N-1}}$. Es evidente que Ω_N es una matriz simétrica. Definamos los vectores columna de esta matriz:

$$\omega_{\mathbf{k}} = \left(1, \omega^k, \omega^{2k}, \ldots, \omega^{k(N-1)}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \qquad \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/N}$$

Observa que, de forma natural, estamos ya trabajando en $\mathbb{C}^N$. Recuerda que en $\mathbb{C}^N$ el producto escalar euclídeo está dado por:

$$(\mathbf{z} \mid \mathbf{w}) = \sum_{j=0}^{N-1} z_j \overline{w_j} \qquad \mathbf{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_{N-1}),\ \mathbf{w} = (w_0, w_1, \ldots, w_{N-1})$$

Teniendo en cuenta que $\omega^N = 1$, es fácil comprobar que los vectores $\omega_{\mathbf{k}}$ $(0 \leqslant k \leqslant N-1)$ son ortogonales y tienen norma igual a $\sqrt{N}$. Dichos vectores son, por tanto, linealmente independientes y forman una base ortogonal de $\mathbb{C}^N$. La igualdad 2.25 nos dice que $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{N-1})$ son las coordenadas del vector $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_{N-1})$ en dicha base o, lo que es igual, notando $\mathbf{e_k}$ el vector k-ésimo de la base canónica de $\mathbb{C}^N$:

$$\sum_{k=0}^{N-1} y_k \mathbf{e_k} = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \omega_{\mathbf{k}}$$

Multiplicando escalarmente esta igualdad por $\omega_{\mathbf{n}}$ obtenemos:

$$\sum_{k=0}^{N-1} y_k (\mathbf{e_k} \mid \omega_{\mathbf{n}}) = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k (\omega_{\mathbf{k}} \mid \omega_{\mathbf{n}}) = Y_n (\omega_{\mathbf{n}} \mid \omega_{\mathbf{n}}) = N Y_n$$

esto es:

$$Y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega^{-nk} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1,\ \ \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/N} \tag{2.26}$$

Pero estas son exactamente las mismas igualdades 2.22. Observa que pueden escribirse en forma fácil de recordar:

$$Y_n = \frac{1}{N}(\mathbf{y} \mid \omega_\mathbf{n}), \qquad \mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}),\ \omega_\mathbf{n} = (1, \omega^n, \omega^{2n}, \dots, \omega^{(N-1)n}),\ \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/N} \tag{2.27}$$

Hemos probado así que:

$$c'_n = \widehat{c}_n = Y_n \qquad 0 \leqslant n \leqslant \frac{N}{2} - 1 \tag{2.28}$$

$$c'_{n-N} = \widehat{c}_{n-N} = Y_n \qquad \frac{N}{2} \leqslant n \leqslant N-1 \tag{2.29}$$

Definición 2.13. La transformación $\mathcal{F} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ que a un vector $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ hace corresponder el vector $\mathbf{Y} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ dado por las igualdades 2.26 o 2.27 se llama la Transformada de Fourier Discreta (DFT) en $\mathbb{C}^N$.

Observa que la DFT es una biyección lineal de $\mathbb{C}^N$ en $\mathbb{C}^N$ cuya inversa viene dada por 2.25. Teniendo en cuenta que Ω_N es una matriz ortogonal simétrica cuya inversa viene dada por $\Omega_N^{-1} = \frac{1}{N}\overline{\Omega_N}$, podemos escribir:

$$\mathbf{Y} = \mathcal{F}(\mathbf{y}) = \frac{1}{N}\overline{\Omega_N}\,\mathbf{y}, \qquad \mathbf{y} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{Y}) = \Omega_N \mathbf{Y}$$

equivalentemente

$$Y_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k\,\mathrm{e}^{-2i\pi nk/N}, \qquad y_n = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k\,\mathrm{e}^{2i\pi nk/N}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Observaciones

- La definición que hemos dado de la DFT es la más usual aunque adolece de cierta falta de simetría debido al factor de escala $1/N$ que figura en la transformada directa pero no en su inversa. De hecho, la definición de la DFT puede variar de unos textos a otros. Es frecuente ortonormalizar la base formada por los vectores ω_k, esto es, considerar la base ortonormal formada por los vectores $\frac{1}{\sqrt{N}}\omega_k$. Con ello se consigue que en las fórmulas anteriores figure como factor de escala en ambas $1/\sqrt{N}$.
- No hay que olvidar la relación entre los Y_n y los coeficientes aproximados de Fourier $\widehat{c}_n$ que viene dada por las igualdades 2.28 y 2.29.
- Hay una estrecha analogía entre la DFT y las series de Fourier.
    - Series de Fourier.

- ◦ Se considera una señal *continua* en el dominio del tiempo, f, con período T y, por tanto, con frecuencia $1/T$ expresada en Hercios (ciclos por segundo).
- ◦ Se trata de descomponer dicha señal como una serie de señales con frecuencias n/T (múltiplos enteros de la frecuencia fundamental). La señal modelo con frecuencia n/T (ciclos por segundo) es $\operatorname{sen}(2\pi nt/T)$. La forma compleja de dicha señal es la función $\mathbf{e}_n(t) = \mathrm{e}^{2\pi\, int/T}$.
- ◦ El *peso* que la componente de frecuencia k/T tiene en nuestra señal viene dado por el producto escalar:

$$(f \mid \mathbf{e}_n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi\, int/T}\,\mathrm{d}t$$

- ◦ La serie que representa a la señal f es $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}(f \mid \mathbf{e}_n)\,\mathrm{e}^{2\pi ikt/T}$. Dicha serie proporciona el espectro de la señal y constituye la representación de la señal en el dominio de la frecuencia.

- Transformada de Fourier Discreta.
  - ◦ Se considera una señal discreta $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots y_{N-1})$ formada por N valores que se interpreta como una muestra tomada en instantes kT/N (donde $k = 0, 1, 2, \ldots N-1$) igualmente espaciados a lo largo de un período de una señal continua de período T.
  - ◦ Se trata de descomponer dicha señal como una suma de señales con frecuencias n/T (múltiplos enteros de la frecuencia fundamental). La señal modelo con frecuencia n/T (ciclos por segundo) es $\operatorname{sen}(2\pi nt/T)$. La forma compleja de dicha señal es $\mathrm{e}^{2\pi\, int/T}$. Puesto que de la señal original solamente conocemos sus valores en los puntos kT/N ($k = 0, 1, 2, \ldots N-1$), lo que hacemos es evaluar en dichos puntos la señal $\mathrm{e}^{2\pi\, int/T}$ y obtenemos así el vector

$$\omega_{\mathbf{n}} = (1, \mathrm{e}^{2\pi in2/N}, \mathrm{e}^{2\pi in3/N}, \ldots, \mathrm{e}^{2\pi in(N-1)/N})$$

  - ◦ El *peso* que la componente de frecuencia n/T tiene en nuestra señal viene dado por el producto escalar:

$$(\mathbf{y} \mid \omega_{\mathbf{n}}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k\,\mathrm{e}^{-2i\pi nk/N}$$

  - ◦ La suma que representa a la señal discreta $\mathbf{y}$ es $\sum_{n=0}^{N-1}(\mathbf{y} \mid \omega_{\mathbf{n}})\omega_{\mathbf{n}}$. Dicha suma se interpreta como la representación de la señal en el dominio de la frecuencia.

Convolución y DFT

Es conveniente considerar los elementos de $\mathbb{C}^N$ como sucesiones periódicas con período N como corresponde a la situación inicialmente considerada $y_k = f(kT/N)$ para $k=0,1,2,\dots,N-1$ donde f es una señal con período T, lo que implica que $y_{k+N}=y_k$. Esto justifica la siguiente definición.

Dado $\mathbf{y}=(y_0,y_1,\dots,y_{N-1})\in\mathbb{C}^N$ y un entero arbitrario $k\in\mathbb{Z}$, definimos $y_k=y_q$ donde $0\leqslant q\leqslant N-1$ es el resto de la división de k por N.

Se define la convolución[2] (llamada a veces convolución circular o periódica o cíclica) de dos elementos de $\mathbb{C}^N$, $\mathbf{x}=(x_0,x_1,\dots,x_{N-1})$ e $\mathbf{y}=(y_0,y_1,\dots,y_{N-1})$ como el elemento $\mathbf{z}=(z_0,z_1,\dots,z_{N-1})$ de $\mathbb{C}^N$ definido por:

$$z_k=\sum_{q=0}^{N-1}x_q y_{k-q} \qquad k\in\mathbb{Z}$$

Es inmediato que z_k es una sucesión periódica con período N. Escribiremos simbólicamente $\mathbf{z}=\mathbf{x}\odot\mathbf{y}$.

Fijado un vector $\mathbf{y}=(y_0,y_1,\dots,y_{N-1})$, la aplicación que a un vector $\mathbf{x}=(x_0,x_1,\dots,x_{N-1})$ hace corresponder el producto de convolución $\mathbf{z}=\mathbf{y}\odot\mathbf{x}$ es una aplicación lineal de $\mathbb{C}^N$ en $\mathbb{C}^N$ que podemos escribir en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} z_0\\ z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_{N-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_0 & y_{N-1} & y_{N-2} & \cdots & y_1\\ y_1 & y_0 & y_{N-1} & \cdots & y_2\\ y_2 & y_1 & y_0 & \cdots & y_3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_{N-1} & y_{N-2} & y_{N-3} & \cdots & y_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0\\ x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{N-1}\end{pmatrix} \tag{2.30}$$

Las propiedades del producto de convolución se deducen fácilmente de la siguiente importante propiedad.

Dados dos vectores $\mathbf{a}=(a_0,a_1,\dots,a_{N-1})$ y $\mathbf{b}=(b_0,b_1,\dots,b_{N-1})$ en $\mathbb{C}^N$ notaremos por $\mathbf{ab}\in\mathbb{C}^N$ su **producto puntual**:

$$\mathbf{ab}=(a_0b_0,a_1b_1,\dots,a_{N-1}b_{N-1})$$

Proposición 2.14. *Sean* $\mathbf{x}=(x_0,x_1,\dots,x_{N-1})$, $\mathbf{y}=(y_0,y_1,\dots,y_{N-1})$ *vectores en* $\mathbb{C}^N$. *Entonces se verifica que:*

$$\mathcal{F}\left(\mathbf{x}\odot\mathbf{y}\right)=N\mathcal{F}(\mathbf{x})\mathcal{F}(\mathbf{y}), \qquad \mathcal{F}(\mathbf{xy})=\mathcal{F}(\mathbf{x})\odot\mathcal{F}(\mathbf{y}) \tag{2.31}$$

[2] Este es uno de los distintos tipos de convolución más frecuentes. Las operaciones de convolución son muy usadas en el procesamiento de señales digitales. Los tipos de filtros más frecuentes actúan sobre la señal de entrada “input” haciendo una convolución con la “función de transferencia del filtro”.

Demostración Pongamos $\mathbf{z} = \mathbf{x} \odot \mathbf{y}$, $\mathbf{X} = \mathcal{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{Y} = \mathcal{F}(\mathbf{y})$ y $\mathbf{Z} = \mathcal{F}(\mathbf{z})$. Por definición:

$$Z_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} x_q y_{k-q} \omega^{-nk}$$

permutando el orden en las sumas obtenemos que:

$$Z_n = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} x_q \omega^{-nq} \sum_{k=0}^{N-1} y_{k-q} \omega^{-n(k-q)} = N X_n Y_n$$

lo que prueba la primera igualdad en 2.31. La otra igualdad se comprueba de forma análoga. $\boxed{\checkmark}$

¿Qué podemos hacer con la Transformada de Fourier Discreta?

La DFT permite representar una muestra en el dominio de la frecuencia. Para ello representamos segmentos que unen los puntos $(n/T, 0)$ y $(n/T, |Y_n|)$. En el dominio de la frecuencia la señal queda claramente descompuesta en sus componentes sinusoidales: cada segmento representa la componente sinusoidal de la frecuencia n/T y amplitud $|Y_n|$. Es muy fácil manipular esta representación para suprimir, por ejemplo, pequeñas distorsiones. En la señal original (en el dominio del tiempo) estas pequeñas distorsiones pueden quedar ocultas pero eso no ocurre en el dominio de la frecuencia pues en él podemos ver las distintas frecuencias que acompañan a la principal y podemos eliminar las frecuencias más altas que suelen corresponder a las distorsiones. Posteriormente recuperamos la señal modificada vía la DFT inversa. Esto es lo que se conoce como "filtrado de la señal" y eso es lo que hacen los convertidores digitales-analógicos.

El dominio de la frecuencia forma parte de nuestra vida diaria. La combinación cerebro-oído es un excelente analizador de frecuencias, capaz de distinguir en un sonido complejo frecuencias muy próximas. Un médico que ausculta un paciente está tratando de oír frecuencias que le digan que algo no va bien. Lo mismo hace un mecánico que escucha el sonido de un motor.

Noticia sobre un famoso algoritmo: la Transformada Rápida de Fourier

Para calcular la DFT usando las fórmulas 2.26 son necesarias

$(N-1)^2$ multiplicaciones complejas

$N(N-1)$ adiciones complejas

Y no hay que olvidar que una multiplicación compleja son 4 operaciones reales. Por ello el coste de cálculo de una DFT de N puntos es del orden de $4N^2$ operaciones reales de punto flotante. Para hacernos una idea de lo que esto supone, recordemos que en los años 50 un ordenador podía realizar del orden de 10^3 operaciones por segundo y para calcular una DFT de 100 puntos necesitaría un tiempo de:

$$4 \times 100^2 \text{ operaciones} \times \frac{1\text{ s}}{10^3 \text{ operaciones}} = 40s$$

y una DFT de 1000 puntos necesitaría un tiempo de cálculo de 4000 s= 1.1h. Actualmente un PC es capaz de realizar 10^7 operaciones por segundo y el tiempo de cálculo de una DFT de 1000 puntos es 0.4 segundos. Esto parece rápido pero en la práctica está muy lejos de ser suficientemente rápido. Considera que es una técnica muy frecuente hacer una DFT de 1000 puntos para generar cada imagen de una animación. Si la animación consta de 10000 imágenes (por tanto es de muy corta duración) el tiempo total de cálculo sería de 4000 segundos, unos 67 minutos. Demasiado.

Puesto que la DFT se ha convertido en la herramienta básica para el tratamiento de señales, no es de extrañar que haya quien afirme que el mundo moderno empezó en 1965 cuando J. Cooley and J. Tukey publicaron su eficaz método para calcular la DFT. Dicho método de cálculo se conoce con el nombre de *Transformada Rápida de Fourier* (FFT=Fast Fourier Transform). Este algoritmo, que marcó una importante etapa en el desarrollo de lo que se conoce como la teoría de *complejidad de algoritmos*, reduce el coste de cálculo de la DFT (suponiendo que N es de la forma 2^p) del orden de N^2 al orden de $N\log_2(N)$. Para $N = 1024 = 2^{10}$ esto supone unas 10.240 operaciones de punto flotante, esto es, reducimos en 1/100 el tiempo de cálculo. Esta enorme reducción del coste computacional es lo que en la práctica hizo posible realizar análisis de Fourier en ordenadores, lo que explica que el trabajo

> J.W. Cooley and J.W. Tukey, *An algorithm for the machine computation of complex Fourier series*, Math. Comp. **19**(1965), 297-301

sea el trabajo de matemáticas más frecuentemente citado de todos los tiempos.[3]

Un uso frecuente de la FFT es para calcular convoluciones. Observa que la igualdad 2.30 implica que para calcular el producto de convolución $\mathbf{y} \odot \mathbf{x}$ se necesitan:

$$\begin{array}{ll} N^2 & \text{multiplicaciones complejas} \\ N(N-1) & \text{adiciones complejas} \end{array}$$

[3]Tukey fue también el inventor del término "bit" como una abreviatura de "binary digit". ¿No sería esto motivo suficiente para pasar a la Historia?

La igualdad $\mathcal{F}\left(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}\right) = N\mathcal{F}(\mathbf{x})\mathcal{F}(\mathbf{y})$ implica que:

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{y} = N\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(\mathbf{x})\mathcal{F}(\mathbf{y})\right)$$

lo que permite usar el algoritmo de la FFT para calcular convoluciones ahorrando tiempo de cálculo.